Тема 24. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

п.1. Классификация методов решения УТ
п.2. Метод разделения переменных (метод Фурье)
п.3. Регулярный и нерегулярный режим
п.4. Метод источника
п.5. Метод интегральных преобразований
п.6. Понятие о методе конечных элементов
п.7. Метод конечных разностей
п.8. Метод прогонки для системы уравнений с 3-х диагональной матрицей коэффициентов
п.9. Блок-схема программы решения УТ методом конечных разностей

п.1. Классификация методов решения УТ

Решение УТ

численное

аналитическое

метод разделения переменных ↔ метод интегральных преобразований ↔ метод источника

метод конечных элементов ↔ метод конечных разностей

явная разностная схема ↔ неявная разностная схема

п.2. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Рассмотрим одномерное ур-е теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Ищем решение в виде произведения двух функций $T(x,t) = X(x)\cdot \tau(t)$. (2)

$$X(x)\frac{d\tau}{dt} = \kappa \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}\cdot \tau(t) \;\Rightarrow\; \frac{1}{T(t)}\frac{d\tau}{dt} = \kappa \cdot \frac{d^2 X}{dx^2}\cdot \frac{1}{X(x)} = -\kappa C^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2}\cdot \dfrac{1}{X(x)} = -C^2 \\ \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\tau}{dt}\cdot \dfrac{1}{\tau(t)} = -C^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} + XC^2 = 0 \\ \dfrac{d\tau}{dt} + \kappa C^2 \tau(t) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \text{решения} \begin{cases} X = a\cdot \sin(Cx) + b\cdot \cos(Cx) \\ \tau = c\cdot e^{-\kappa C^2 t} \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь *вид и знак постоянной разделения* выбран так чтобы избежать бесконечного растущих со временем решений для $\cdot\tau(t)$.

Из (3) ➔общее решение ур-я теплопроводности: $T(x,t) = [a \cdot \sin(Cx) + b \cdot \cos(Cx)] \cdot e^{-\kappa C^2 t}$

Теоремы, *обосновывающие практическое применение* Метода разделения переменных:

Теорема. Сумма частных решений ДУ также является решением ДУ.

Следовательно, решение можно искать в виде сумм (рядов). А подбором коэффициентов в рядах можно строить решения, удовлетворяющие различным требованиям, например, НУ задачи.

Опр. Задача отыскания величин λ (собственных значений) и функций $X(x)$ (собственных функций) удовлетворяющих уравнению

$$D[X(x)] - \lambda \cdot p(x)X(x) = 0$$

И линейным однородным ГУ

На отрезке $x \in [a,b]$

называется *задачей Штурма - Лиувиля.*

Теорема. Для классических задач уравнений матфизики (в том числе для краевой задачи (1)) имеется бесконечное *счетное множество* решений, задающихся собственными значениями и собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лиувиля.

Теорема Стеклова. Любая функция на отрезке $x \in [a,b]$ удовлетворяющая нулевым ГУ на границе отрезка $[a,b]$ может быть разложена в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям задачи Штурма- Лиувиля.

Теорема. Собственные функции задачи Штурма- Лиувиля – ортогональны на отрезке $x \in [a,b]$, а собственные числа - вещественны.

Опр. Функции $\varphi(x)$ и $\xi(x)$ ортогональны на отрезке [a,b] если

$$\int_a^b \varphi(x)\xi(x)dx = 0$$

1-я краевая задача теплопроводности.

Г.У.

$$T(x=0,t)=0$$
$$T(x=L,t)=0 \qquad (4)$$

Н.У.

$$T(x,t=0)=T_0(x)$$

Учитывая решение (2) - (3) обще решение можно записать

$$T(x,t)=[a\cdot\sin(Cx)+b\cdot\cos(Cx)]\cdot e^{-\kappa C^2 t}.$$

Чтобы удовлетворить Г.У. координатная часть решения должна представлять собой бесконечный ряд с кратными длине L периодами

$$X(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi\cdot x}{L}\right).$$

Чтобы удовлетворить Н.У.

$$T(x,t=0)=T_0(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\right]. \qquad (5)$$

Из теоремы Стеклова следует, что это возможно, если соответствующим образом определить коэффициенты ряда a_i.
Это делается исходя из свойства ортогональности слагаемых суммы.

$$a_i=\frac{2}{L}\int_0^L\left[T_0(x)\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\right]dx \qquad (6)$$

Заметим, что постоянная разделения C задает связь между выражение под синусом и в экспоненте

$$C=\frac{i\cdot\pi}{L}$$

Т.о. записываем решение *Задачи*, удовлетворяющее Г.У. и Н.У:

$$T(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot e^{-\kappa\left(\frac{i\cdot\pi}{L}\right)^2 t}\right], \qquad (7)$$

Где a_i - вычисляются согласно (6).

п.3. Регулярный и нерегулярный режим охлаждения (нагрева)

Решение 1-й краевой задачи (7) можно записать с использованием безразмерного комплекса $Fo \equiv \frac{\kappa t}{L^2}$ (суть- безразмерное время), называемого *числом Фурье*. $$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i \cdot \sin\left(\frac{i\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot e^{-i\pi^2 Fo}\right].$$

Видно, что при $Fo >> 1$ решение определяется первым слагаемым, поскольку все последующие слагаемые быстро убывают со временем.

В целом временной режим нагрева (остывания) определяется как $T(x,t) \approx e^{-\frac{\kappa\pi^2 t}{L^2}}$. и называется ***регулярным***.

Если $Fo \le 1$, то все слагаемые решения (7) существенны.
Такой режим называется ***нерегулярным.***
На ***нерегулярной стадии*** нагрева (остывания) температурное поле существенно зависит от начального распределения температур.
На ***регулярной стадии*** – температурное поле не «помнит» своего начального распределения и тело остывает как целое по экспоненциальному закону.

Режим процесса	***Определяется***	***Безразм. время***	***Отношение к НУ***
Регулярный	1-м слагаемым ряда	$Fo >> 1$	Не “помнит” НУ
нерегулярный	Многими слагаемыми	$Fo \le 1$	Зависит от НУ

п.4. Метод источника

МИ – классический метод решения Ур-я теплопроводности, удобный для бесконечных и полубесконечных систем.
МИ в определенном смысле (как будет видно дальше) имеет общее с методом Фурье и методом интегрального преобразования

Пусть существует бесконечны стержень, рис.2.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

Н.У.

$$T(x, t=0) = T_0(x) \tag{8}$$

Вопрос. Граничных условий для задачи (1), (8) мы не задали.
Почему?

Следуя логике метода Фурье запишем частное решение уравнения (1).

$$T(x,t) = X(x)\cdot\tau(t) = C(k)\cdot\exp(-\kappa k^2 t \pm ikx). \tag{9}$$

Здесь второе слагаемое в экспоненте эквивалентно записи решения (3) (формула Эйлера $e^{-ix} = \cos x + i \sin x$), k - произвольное вещественное число $-\infty < k < \infty$. *C(k)* - произвольная константа, записанная как функция k.

Общее решение – может быть записано как бесконечная сумма (или в нашем случае интеграл) частных решений

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{T}(x,t,k)dk = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\exp(-\kappa k^2 t + ikx)dk \qquad (10)$$

Здесь знак “ $\pm$ ” заменен на “+” для однозначности, ведь в (10) $-\infty < k < \infty$ и поэтому знак при i будет меняться.

Из НУ (8) ➔ $T(x,t=0) = T_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\exp(ikx)\,dk$ (11)

Но (11) есть не что иное как интеграл Фурье, т.е специальный интеграл ***для которого известно как найти*** *C(k)* если известна функция $T_0(x)$:

$$C(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} T_0(\xi)\exp(-ik\xi)\,d\xi \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11) вместо *C(k)* получим решение, удовлетворяющее Н.У. (8)

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T_0(\xi)\exp(-ik\xi)d\xi \cdot \exp(-\kappa k^2 t + ikx)dk \qquad (13)$$

По правилам высшей математики (матанализ) в (13) можем поменять порядок интегрирования

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\kappa k^2 t + ik(\xi - x))dk \cdot T_0(\xi)d\xi \qquad (13')$$

Внутренний интеграл может быт взят аналитически (см. Таблицы интегралов или пакет Mathematica)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\kappa k^2 t - ik(\xi - x))dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) \equiv G(x,\xi,t) \qquad (14)$$

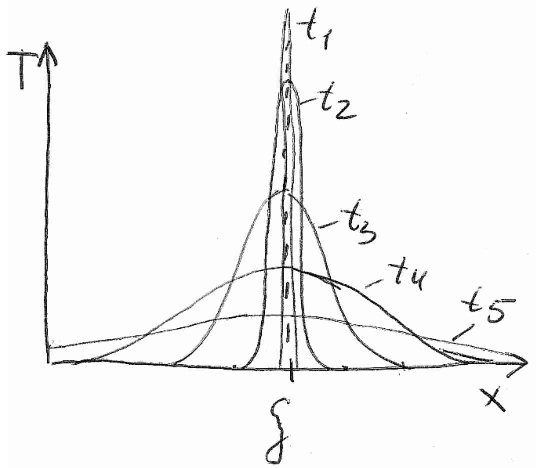


Рис.1. Эволюция фундаментального решения *G(x,ξ,t)*

Функция $G(x,\xi,t)$ - называется ***фундаментальным решением*** уравнения теплопроводности или функцией теплового источника.

Физический смысл фундаментального решения УТ заключается в том, что оно моделирует расплывание (эволюцию) моментального источника теплоты в точке ξ (дельта- функция $\delta(x-\xi)$) в бесконечном стержне, рис.1.

Решение (13’), очевидно, можно записать через фундаментальное решение

$$T(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\,T_0(\xi)\,d\xi \qquad (15)$$

Физический смысл (15) в том, что начальное распределение температуры задает континуальное распределение моментальных источников теплоты, каждый из которых эволюционирует как фундаментальное решение, рис.2.

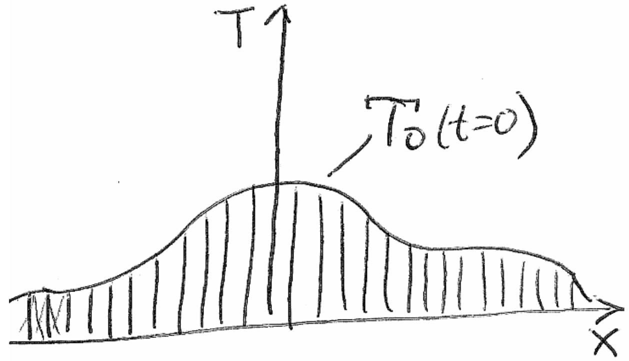


Рис.2. Решение как эволюция бесконечного количества *G(x,ξ,t)*

п.5. Метод интегральных преобразований

Метод позволяет свести дифференциальное ур-е к алгебраическому.

Первоначально это была эвристическая методика решения ДУ используемая математиком Хевисайдом работавшим в конце 19 века, был самоучкой

После была разработана строгая математическая теория метода интегральных преобразований.

Прямое интегральное преобразование

$$Tf(u)=\int_{t_1}^{t_2}K(t,u)\,f(t)\,dt$$

образ *ядро* *оригинал*

Обратное интегральное преобразование

$$\underbrace{f(t)}_{\text{оригинал}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \underbrace{K^{-1}(u,t)}_{\text{ядро обр. преоб.}} \ \underbrace{Tf(u)}_{\text{образ}}\, du$$

Преобразование	K	t_1	t_2	K^{-1}	u_1	u_2
Фурье, F	$\dfrac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{e^{+iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$+\infty$
Лапласа, L	e^{-ut}	0	$+\infty$	$\dfrac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$e-i\infty$	$e+i\infty$

Решение задачи ТП состоит из следующих действий.

1) выбор подходящего интегрального преобразования (ИП)
2) умножение ур-я и ГУ на ядро ИП и последующее интегрирование в соответствующих пределах
3) при интегрировании используются ГУ для вычисления членов, возникающих от пределов интегрирования
4) решается полученное ур-е для образа искомой функции
5) по формуле обращения (обратного преобразования) находится искомая функция –решение задачи.

Пример применения МИП

Рассмотрим граничную задачу (1), (8) для ур-я теплопроводности (аналогично методу источников)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Н.У.

$$T(x, t=0) = T_0(x) \qquad (8)$$

Обозначим $\underbrace{T(\lambda,t)}_{\text{образ } T} = R\big[T(x,t)\big]$, $\underbrace{\Phi(\lambda)}_{\text{образ } \varphi} = R\big[\varphi(x)\big]$

<u>**Шаг 1**</u>**.** Применяем преобразование Фурье чтобы получить задачу в образах ИП

$$R\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = \kappa \cdot R\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right], \qquad R\left[T(x, t=0)\right] = R\left[T_0(x)\right]$$

Используя таблицы интегралов или таблицы прямых и обратных интегральных преобразований получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(\lambda, t)}{\partial t} = \kappa \cdot \left[-\lambda^2 T(\lambda, t)\right] \\ T(\lambda, 0) = R[T_0(x)] = \Phi(\lambda) \end{cases}$$ - образ наячальной функции.

<u>Шаг 2</u>. Решаем задачу в образах.

$$T(\lambda, t) = C \exp(-\lambda^2 \kappa t)$$

Поскольку

$T(\lambda, 0) = \Phi(\lambda)$, то $C = \Phi(\lambda)$ ➔

$$T(\lambda, t) = \Phi(\lambda) \exp(-\lambda^2 \kappa t) \qquad (**)$$

<u>Шаг 3.</u> Делаем обратное преобразование.

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} xp(+i\lambda t) \Phi(\lambda) \exp(-\lambda^2 \kappa t)\, d\lambda$$

Т.о. получили решение, в точности аналогичное решению полученному методом источника.

п.6. Понятие о методе конечных элементов (МКЭ)

В основе МКЭ – вариационная теория.

Преимущество МКЭ - удобство использования для произвольных сеточных разбиений систем сложных геометрий.

Недостаток МКЭ – сложность алгоритмов и программирования.

Пусть решается 2- мерная задача

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = q_v$$

ГУ

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha\left(T - T_0\right) + q_w .$$

В вариационной теории доказано, что решение данной задачи минимизирует функционал (интеграл от вариабельной функции)

$$J=\int_S\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right)^2+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right)^2+q_v\overline{T}\right]dS+\int_{Граница}\left[q_w\overline{T}+\frac{\lambda}{2}(\overline{T}-T_\infty)^2\right]dF \qquad (17)$$

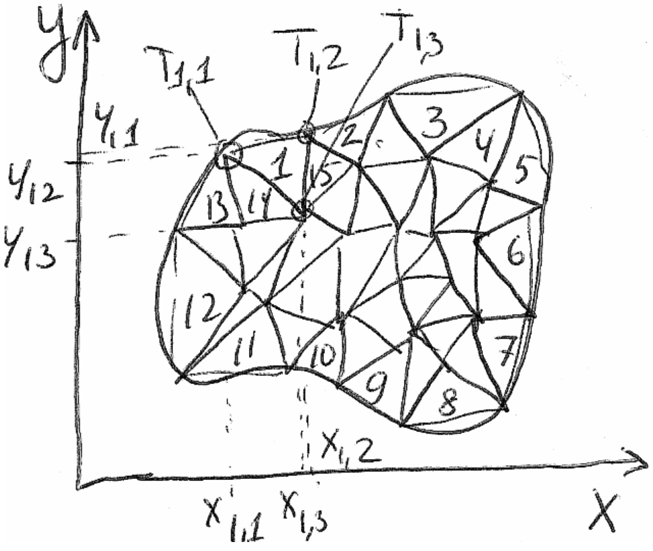


Рис.3. Разбивка фигуры на элементы

Всю поверхность 2-мерной системы делят на произвольные треугольники (объем делят на тетраэдры) или иные площадки (объемы), называемые ***конечными элементами,*** рис.3.

$\overline{T}$ - вариабельная функция, называемая пробной функцией.

Для каждого конечного элемента выполняется условие (17) поскольку функционал аддитивен $J=\sum_i J_i$.

$$(18)$$

В *i*-м элементе Т в углах аппроксимируется полиномиальной (в простейшем случае линейной) функцией:

$$\begin{cases} T_{i,1}=a_i+b_i x_{i,1}+d_i y_{i,1} \\ T_{i,2}=a_i+b_i x_{i,2}+d_i y_{i,2} \\ T_{i,3}=a_i+b_i x_{i,3}+d_i y_{i,3} \end{cases} \qquad (19)$$

Т.о. для i- го элемента имеем 3 неизвестных величины $\{a_i, b_i, d_i\}$. Очевидно полиномиальные коэффициенты $\{a_i, b_i, d_i\}$ могут быть найдены при известных значениях температур в узлах $\{T_{i,1}, T_{i,2}, T_{i,3}\}$ и координатах $\{x_{i,1}, y_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,3}\}$. Тогда функционал по-сути является функционалом от

$$J=f\{a_i(T_{i,k}, x_{i,k}, y_{i,k});\ b_i(T_{i,k}, x_{i,k}, y_{i,k});\ c_i(T_{i,k}, x_{i,k}, y_{i,k})\}$$

Чтобы выбрать температуры в вершинах, минимизирующие функционал (18) приравниваем Нулю производные

$$\frac{\partial J}{\partial T_{i,k}}=0 \qquad (20)$$

Уравнение (20) определяет систему алгебраических уравнений для $T_{i,k}$ которую решают численными методами (итерациями).

п.7. Метод конечных разностей

В основе МКР - переход от непрерывного пространства определения функций и параметров к дискретному (сеточному) пространству и сеточным функциям (функциям, значения которых определены в узлах сетки). Рис.1, 2.

В цилиндрической симметрии задача теплопроводности описывается ДУ

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right). \qquad (19)$$

В дискретном пространстве (на сетке) аппроксимируются дифференциальные операторы, параметры функции и ГУ, – т.е. строится дискретный (разностный) аналог задачи. (или иначе разностная аппроксимация).

Аппроксимация может быть построена по явной и неявной схеме

Явная схема – все пространственные операторы строятся на текущем (n -ном) временном шаге.
Неявная схема - все или часть пространственных операторов строятся на будущем (n+1 - вом) временном шаге.

Пример **явной** аппроксимации уравнения теплопроводности
Аналоги дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t};\quad \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{T_{i+1}^n-T_{i-1}^n}{2\Delta r};\quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{\Delta r^2} \qquad (20)$$

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\kappa\left(\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{\Delta r^2}+\frac{1}{r_i}\frac{T_{i+1}^n-T_{i-1}^n}{2\Delta r}\right) \qquad (22)$$

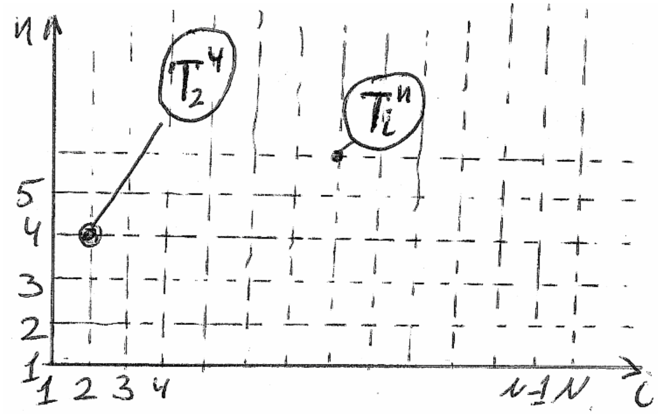


Рис.4. Равномерная пространственно-временная сетка

Пример **неявной** аппроксимации операторов и уравнения теплопроводности:

Аналог Ур-я: $$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\kappa\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\Delta r^2}+\frac{1}{r_i}\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r}\right) \qquad (21)$$

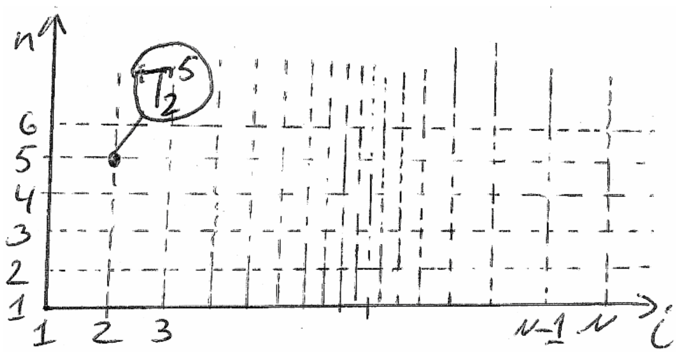


Рис.5. Неравномерная сетка

ГУ 1-го рода: $T_1^n=const1;\ T_N^n=const2.$

ГУ 2-го рода:

$$-\lambda\frac{T_2^n-T_1^n}{\Delta r}=q1;\quad\Rightarrow\quad T_1^n=T_2^n+\frac{q1}{\lambda}\Delta r$$

$$-\lambda\frac{T_N^n-T_{N-1}^n}{\Delta r}=q2\quad\Rightarrow\quad T_N^n=T_{N-1}^n-\frac{q2}{\lambda}\Delta r$$

ГУ 3-го рода:

$$-\lambda\frac{T_2^n-T_1^n}{\Delta r}=\alpha1(T_1^n-T_{f1}^n)\quad\Rightarrow\quad T_1^n\left[1-\frac{\alpha1\Delta x}{\lambda}\right]=T_2^n-\frac{\alpha1\Delta r}{\lambda}T_{f1}^n$$

$$-\lambda\frac{T_N^n-T_{N-1}^n}{\Delta r}=\alpha2(T_N^n-T_{fN}^n)\quad\Rightarrow\quad T_{N-1}^n\left[1-\frac{\alpha2\Delta x}{\lambda}\right]=T_N^n-\frac{\alpha2\Delta r}{\lambda}T_{f2}^n$$

Т.о. ГУ представимы как линейная связь приграничных температур:
$$T_1^n = \alpha_2 T_2^n + \beta_2$$
$$T_{N-1}^n = \alpha_N T_N^n + \beta_N \,. \qquad (23)$$

Решение разностной задачи

Решением разностной задачи – нахождение значений температур во всех пространственных и временных узлах, т.е. массивов $\{T_i^n\}$ на всех необходимых временных слоях n.

После того как построен разностный аналог задачи (21)- (23) реализуется алгоритм ее решения.

Основные формальные требования к алгоритмам:

1) устойчивость (отсутствие экспоненциального роста погрешностей решения);
2) равномерная аппроксимация решения $\lim \left\| T_i - T(x_i) \right\|_{\Delta x \to 0} = 0$.

Простейший алгоритм решения задачи реализуется для явной разностной схемы (22).
Очевидно

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^{n1}}{2\Delta r} \right) \Delta t$$

Рассмотрим неявную разностную аппроксимацию (21) и приведем все члены при T_i^{n+1}

$$T_{i-1}^{n+1} \underbrace{\frac{\kappa \Delta t}{\Delta r^2}}_{A_i} - T_i^{n+1} \underbrace{\left[\frac{\kappa^2 \Delta t}{r_i^2} + 1 \right]}_{C_i} + T_{i+1}^{n+1} \underbrace{\left[\kappa \Delta t + \frac{\kappa \Delta t}{r_i} \right]}_{B_i} = -\underbrace{T_i^n}_{F_i} \qquad (24)$$

или для векторов $\{T_i^{n+1}\}$ в матричном виде $M \times T = F$, где $M = \underbrace{\begin{pmatrix} CB\ldots\ldots \\ ACB\ldots.. \\ .\,ACB\ldots.. \\ ..\,ACB\ldots. \end{pmatrix}}_{N \times N}$ - тридиагональная матрица.

Т.о. имеем систему алгебраических уравнений для переменной T_i^{n+1} с тридиагональной матрицей коэффициентов.

п.8. Метод прогонки для системы уравнений с 3-х диагональной матрицей коэффициентов

Самый распространенный метод решения системы уравнений с тридиагональной матрицей коэффициентов -

метод прогонки. Другие методы – связаны с последовательным *итерированием* первоначального вектора решения. Преимущество метода прогонки – высокая скорость и точность решения.

Решаем систему (24)

$$A_i T_{i-1}^{n+1} - C_i T_i^{n+1} + B_i T_{i+1}^{n+1} = -F_i \qquad (25)$$

для $i = 2, 3, 4, ..., N-1$
,

ГУ: $T_1^n = \alpha_2 T_2^n + \beta_2$; $T_{N-1}^n = \alpha'_N T_N^n + \beta'_N$ (26)

Предположим, что как и ГУ, все температуры в узлах связаны линейным соотношением (23), $T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \beta_{i+1}$, тогда $T_{i-1} = \alpha_i T_i + \beta_i$ подставляем это в (25) ➔

$$A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) T_i^{n+1} + B_i T_{i+1}^{n+1} = -F_i$$

Затем подставляем выражение для T_i ➔

$$A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + [(A_i \alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i] T_{i+1}^{n+1} = -F_i \qquad (27)$$

Уравнение (26) выполняется при условии

$$\begin{cases} A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -F_i \\ (A_i \alpha_i - C_i) a_{i+1} + B_i = 0 \end{cases} \quad ➔ \qquad (28)$$

Отсюда следует рекуррентная связь между параметрами α_i *и* β_i, наз. ***параметрами прогонки***.

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \dfrac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i} \\ \alpha_{i+1} = \dfrac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} \end{cases}$$

Следовательно, из ГУ можно последовательно пересчитать все параметры прогонки:

$\{\alpha_2, \beta_2\}$ ➔ $\{\alpha_3, \beta_3\}$ ➔ $\{\alpha_4, \beta_4\}$ ➔ ….. ➔ $\{\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}\}$ ➔ $\{\alpha_N, \beta_N\}$

Далее по определению линейной связи (23), (26) можем последовательно рассчитать

Температуры в узлах начиная с граничной температуры T_N^n

$$T_{N-1}^n = \alpha_N T_N^n + \beta_N\,, \Rightarrow \quad T_{N-2}^n = \alpha_{N-1} T_{N-1}^n + \beta_{N-1}\,, \Rightarrow \ldots \quad T_2^n = \alpha_3 T_3^n + \beta_3\,, \Rightarrow \quad T_1^n = \alpha_2 T_2^n + \beta_2\,.$$

Указанные процедуры называются прямая и обратная прогонка и легко реализуются вычислительно.

Для ГУ 3-го рода

$$T_{N-1}^n = \alpha'_N T_N^n + \beta'_N\,,$$

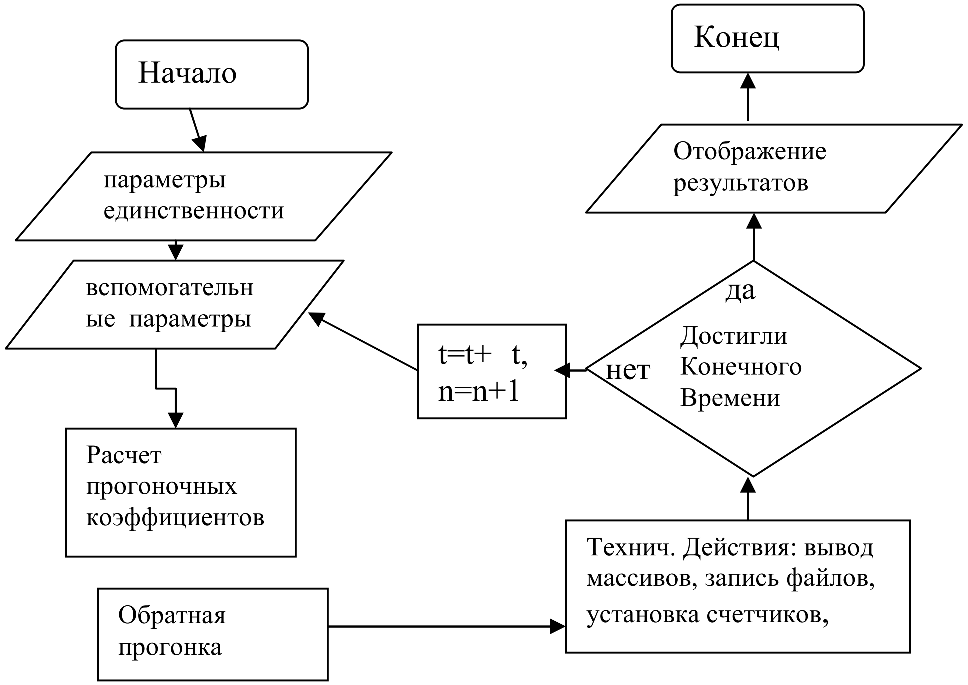
при этом также $T_{N-1}^n = \alpha_N T_N^n + \beta_N$. $\Rightarrow$ из условия $T_{N-1}^n = T_{N-1}^n$ $\Rightarrow$ $\alpha'_N T_N^n + \beta'_N = \alpha_N T_N^n + \beta_N$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad T_N^n = \frac{\beta_N - \beta'_N}{\alpha'_N - \alpha_N} \quad \text{(в случае } \alpha'_N - \alpha_N \neq 0 \text{)},$$

Далее повторяется обратная прогонка.

$$T_{N-1}^n = \alpha_N T_N^n + \beta_N\,, \Rightarrow \quad T_{N-2}^n = \alpha_{N-1} T_{N-1}^n + \beta_{N-1}\,, \Rightarrow \ldots \quad T_2^n = \alpha_3 T_3^n + \beta_3\,, \Rightarrow \quad T_1^n = \alpha_2 T_2^n + \beta_2\,.$$

п.9. Блок-схема программы решения УТ методом конечных разностей



Программа на Си++ для расчета температурного поля одномерной системы с ГУ 2-го рода достаточно проста и займет 40-50 строчек/