Тема 23. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

п.1. Стационарное температурное поле в плоской стенке

Рассматриваем случай когда
1) Внутренних источников теплоты – нет
2) Коэфф. теплопроводности не зависит от координаты и температуры

Тогда УТ $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ➔ в стационарном случае $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ➔ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ (1)

Общее решение (1) $T = c_1 x + c_2$ (2)

Т.о. в плоской стенке температурное поле линейная функция координаты.

Решение УТ в плоской симметрии с ГУ 1 -го рода, рис.1.

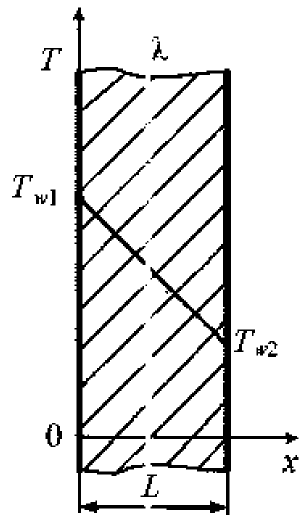

Рис.1.Профиль температуры в плоской стенке. ГУ 1-го рода

Заданы Г.У.:

$T(x=0) = T_1$, $T(x=L) = T_2$ ➔ используем (2) $\begin{cases} T(x=0) = T_1 = c_2 \\ T(x=L) = T_2 = c_1 L + c_2 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} c_2 = T_1 \\ c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$ ➔ $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$ (3)

Следовательно тепловой поток

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \text{или} \quad q = \frac{T_1 - T_2}{L/\lambda} = \frac{\Delta T}{R_\lambda}, \qquad (4)$$

Где $R_\lambda \equiv L/\lambda$ - ***термическое сопротивление*** *плоской* стенки [(м^{2}К)/Вт].

Обратная величина $1/R_\lambda \equiv \lambda / L$ - термическая проводимость плоской стенки.

Задача. Коэфф. Теплопроводности функция T: $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$.
Найти профиль температуры и тепловой поток в плоской стенке?

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_1\right) - \frac{2q \cdot x}{\lambda_0 b} - \frac{1}{b}},$$

$$q = \frac{\lambda_{cp}}{L} \Delta T, \quad \lambda_{cp} = \lambda_0 \left(1 + b \frac{T_1 + T_2}{2}\right)$$

Температурный профиль в безразмерном виде.

Обезразмерим выражение (3) используя как масштаб полный перепад температур $\Delta T = T_1 - T_2$

$$\frac{T}{\Delta T} = \frac{T_1}{\Delta T} - \frac{x}{L} ➔ \frac{T - T_1}{\Delta T} = -\frac{x}{L}$$ или $\Psi = -X$ - решение в безразмерном виде .

Удобнее, однако безразмерную температуру иметь положительной величиной.
Тогда отнесем температуру T к меньшей температуре T_2:

$$\frac{T}{\Delta T}-\frac{T_2}{\Delta T}=\frac{T_1}{\Delta T}-\frac{T_2}{\Delta T}-\frac{x}{L} \rightarrow \frac{T-T_2}{\Delta T}=\frac{T_1-T_2}{\Delta T}-\frac{x}{L} \rightarrow$$

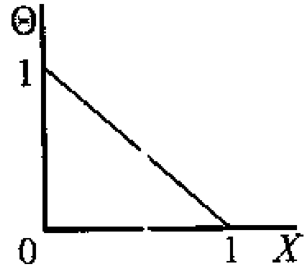

Рис.2.Профиль температуры в безразмерных переменных

$\Theta = 1 - X$ - решение в безразмерном виде, (5)

Где $\frac{T-T_2}{\Delta T} \equiv \Theta$ - безразмерная температура, $\frac{x}{L}$ - безразмерная координата.

Удобство безразмерной формы – в независимости ее от конкретных условий задачи (в данном случае Г.У.).

Можно обезразмерить и тепловой поток. Но внешнего масштаба для потока нет. Если использовать внутренний масштаб задачи, то обезразмеренный поток будет равен единице.

Температурное поле при линейной зависимости теплопроводности от температуры

См. решение задачи.

Теплопроводность многослойной стенки

Рассмотрим многослойную стенку, рис.3

Очевидно, удельный тепловой поток остается постоянным во всех слоях.

Перепад температуры в каждом слое может быть выражен через удельный тепловой поток и термические сопротивления

$T_1 - T_2 = qR_{\lambda 1}$,

$T_2 - T_3 = qR_{\lambda 2}$, (6)

…

$T_N - T_{N+1} = qR_{\lambda N}$.

Суммирование равенств приведет к:

$$T_1 - T_{N+1} = q[R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + ... + R_{\lambda N}], \rightarrow q = \frac{T_1 - T_{N+1}}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + ... + R_{\lambda N}} = \frac{T_1 - T_{N+1}}{R_{\lambda \Sigma}}. \quad (7)$$

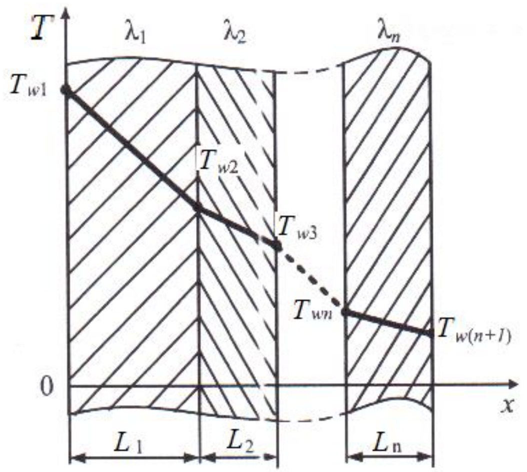

Рис.3.Профиль температуры в многослойной стенке

В знаменателе (7) – сумма термических сопротивлений слоев –

полное термическое сопротивление системы.

Поскольку ГУ и свойства слоев известны – рассчитывается поток, а затем и температурный профиль:

$T_2 = T_1 - qR_{\lambda 1}$,

$T_3 = T_2 - qR_{\lambda 2}$,

И т.д.

Здесь $R_{\lambda 1} = L_1 / \lambda_1$, $R_{\lambda 2} = L_1 / \lambda_1$, ..., $R_{\lambda N} = L_N / \lambda_N$.

Задание.
Сформулируйте пошаговый алгоритм расчета температурного поля в многослойной пластине?

Можно ввести понятие *эффективной (эквивалентной) теплопроводности* многослойной стенки такое, что

$$q = -\lambda_{эфф\Sigma} \frac{T_1 - T_{N+1}}{L}.$$

С учетом (7) $\lambda_{эфф\Sigma} = -\frac{L}{R_{\lambda\Sigma}} = \frac{\sum L_i}{\sum R_\lambda}$. (8)

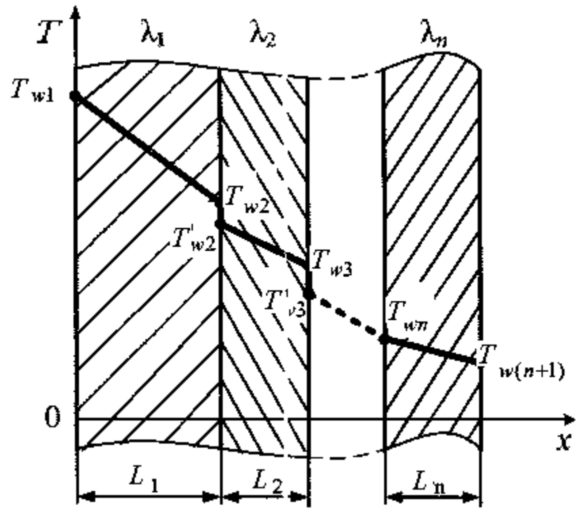

Рис.4.Профиль температуры с контактными перепадами температуры

Случай термического сопротивления контакта слоев.

В ряде случаев слои в многослойной системе соединены неплотно (прослойки воздуха или другого газа) и образуют т.н. контактное термическое сопротивление, рис.4.

Контакты между слоями следует рассматривать как дополнительные слои плохо проводящего теплоту материала с плохо определяемой толщиной. Ввиду того, что толщина этого слоя мала и плохо определена и теплопроводность мала и также плохо определена их не используют для прямого расчета, а пользуются понятием контактного термического сопротивления

$R_{K1} = \frac{T_1 - T_1'}{q}$, так, что $T_1 - T_1' = qR_{K1}$ (9)

> ***Задание.***
> Оцените контактное сопротивление из общих физических представлений о шероховатости и теплопроводности материалов?
> $R_K = 10^{-5} \div 10^{-2}$ [(м^{2}К)/Вт].

Если контактные термические сопротивления известны, что задача нахождения температурного профиля полностью эквивалентна задаче многослойной стенки с нулевой толщиной контактного слоя.

Величина контактного сопротивления уменьшается при использовании теплопроводных мастик, приложением усилия сжатия, полировкой, притиркой поверхностей может варьироваться в широких пределах.

Случай ГУ 3-го рода

Рассмотрим одномерную систему жидкость (или газ) – стенка - жидкость, рис.5.
Заданы температуры жидкостей, параметры стенки (толщина и теплопроводность) и коэффициенты теплоотдачи (слева и справа). Определить профиль температуры и тепловой поток.
Это типичная задачи теплопередачи.

Ключевым фактором задачи является постоянство плотности теплового потока q в системе.

Из закона теплоотдачи Ньютона-Рихмана

$q = \alpha_1 (T_{f1} - T_1)$ - слева от стенки,

$q = \alpha_2 (T_2 - T_{f2})$ - справа от стенки. (10)

$q = \frac{1}{R_\lambda}(T_1 - T_2)$ - в стенке.

Из (10) аналогично случаю многослойной стенки:

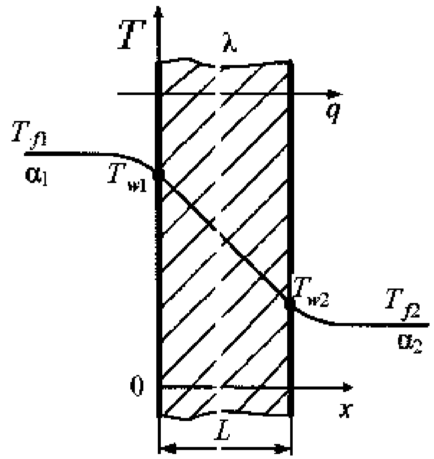

Рис.5.Профиль температуры пластины с ГУ 3-го рода

$$\begin{cases} T_{f1} - T_1 = q/\alpha_1 \\ T_2 - T_{f2} = q/\alpha_2 \\ T_1 - T_2 = q \cdot R_\lambda \end{cases} \Rightarrow T_{f1} - T_{f2} = q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} + R_\lambda\right) \Rightarrow q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} + R_\lambda} \quad (11)$$

Рассчитав q аналогично случаю многослойной стенки последовательно слева направо рассчитываются температуры в стенке.

Величину $R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} + R_\lambda$ называют *полным термическим сопротивлением теплопередаче*.

Обратную величину $K = 1/R$ называют коэффициентом теплопередачи от теплоносителя 1 к теплоносителю 2.

$R_w = 1/\alpha_1$ - термическое сопротивление теплоотдачи от стенки.

Аналогично решается задача для теплопередачи через многослойную стенку, в том числе с контактными термическими сопротивлениями., - 1) записывается полное термическое сопротивление,
2) рассчитывается тепловой поток, 3) последовательно пересчитываются температуры на границах слоев.

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + R_{\lambda 3} + R_{\lambda 4} + ... + R_{K1} + R_{K2} + R_{K3} + R_{K4} .....$$

Случай ГУ 2-го и 3-го рода

Рассмотрим одномерную задачу с ГУ 2-го рода на левой границе и ГУ 3-го рода – на правой, рис.6.
Требуется определить распределение температуры в системе.
Поскольку тепловой поток задан граничным условием, то можно сразу приступить к определению температур в системе.
Двигаемся от известной температуры жидкости справа от стенки.

$$T_{w2} = T'_{f2} + q/\alpha_2$$

$$T_{w1} = T_{w2} + q\frac{L}{\lambda}.$$

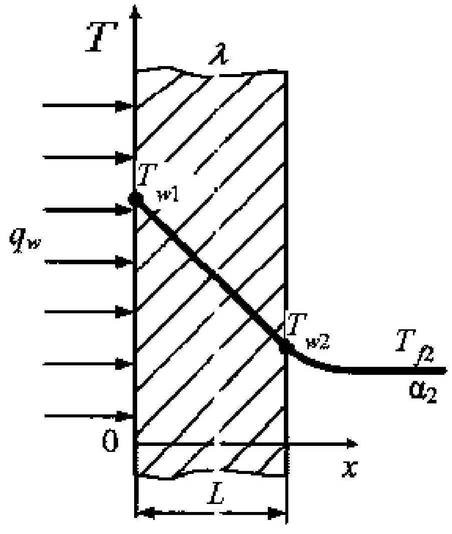

Рис.6. Профиль температуры пластины с ГУ2-го и 3-го рода

п.2. Стационарное температурное поле в цилиндрической стенке

Приведем решение УТ в цилиндрической симметрии с ГУ 1 -го рода (рис.7.).
Предполагаем 1) постоянство коэффициента теплопроводности,
2) отсутствие внутренних источников.
Для одномерной системы в стационаре УТ (см. лапласиан в цилиндрических координатах)

В некоторых источниках описываются графические методы определения профиля температуры в плоской одномерной системе, однако ввиду простоты аналитического расчета графические методы вряд ли имеют прикладное значение.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \qquad (12)$$

Общее решение (12) имеет вид $T = c_1 \ln r + c_2$. (Ур-е (12) последовательно два раза интегрируется)

Заданы ГУ

$$\begin{matrix} T(r=r_1)=T_1 \\ T(r=r_2)=T_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} T_1 = c_1 \ln r_1 + c_2 \\ T_2 = c_1 \ln r_2 + c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_2 - T_1 = c_1 \ln(r_2/r_1) \\ c_2 = T_1 - c_1 \ln r_1 \end{cases} \rightarrow T = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln r + T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln r_1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = T_1 - (T_1 - T_2)\left[\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}\right] \qquad (13)$$

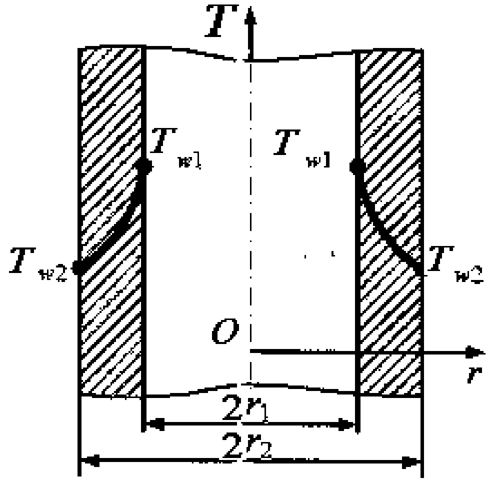

Рис.7. Профиль температуры в цилиндрической стенке ГУ 1-го рода

Т.о. распределение температуры в цилиндрической стенке нелинейное – логарифмическое. Соответственно плотность потока не сохраняется постоянной как в случае плоской стенки, а уменьшается с увеличением радиуса.

Полный поток теплоты (не удельный) $Q = -\lambda \frac{dT}{dr} A$, (14)

Из (13) $\rightarrow$ $\frac{dT}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{r \ln(r_2/r_1)}$,

Площадь цилиндрической площадки $A = 2\pi r h$, где h – высота участка.

Т.О. $Q = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{r \ln(r_2/r_2)} 2\pi r h$,

(знак «- исчез из-за перемены местами T_1 и T_2).

Удельный поток на единицу длины цилиндра $q = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_2)} 2\pi$ (15)

Вводя понятие *линейного термического сопротивления* $R_\lambda^c = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\lambda}$ (16)

запишем (15) в виде $q = \pi \frac{T_1 - T_2}{R_\lambda^c}$. (17)

Как видно из (15) поток, отнесенный к единице длины цилиндра (линейная плотность потока) не зависит о текущего радиуса r. Этот фактор лежит в основе расчета профиля температур многослойных цилиндрических стенок (как постоянство плотности потока для плоской стенки).

Задача. Найти в общем виде стационарное поле температуры в плоской стенке с ГУ 1-го рода при постоянном однородном по всей толщине источнике тепловыделения.

Плотность потока на внутренней поверхности $q_1 = q/(2\pi r_1) = \lambda \dfrac{T_1 - T_2}{r_1 \ln(r_2/r_1)} = \dfrac{T_1 - T_2}{2 r_1 R_\lambda^c}$

Плотность потока теплоты на внешней поверхности $q_2 = q/(2\pi r_2) = \lambda \dfrac{T_1 - T_2}{r_2 \ln(r_2/r_1)} = \dfrac{T_1 - T_2}{2 r_2 R_\lambda^c}$

Теплопроводность многослойной цилиндрической стенки

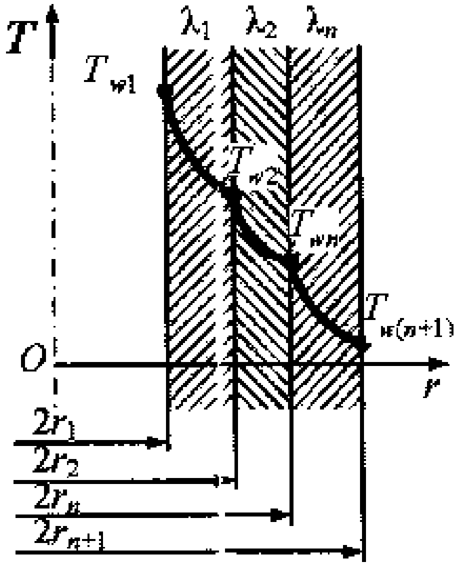

Рис.8. Профиль температуры в многослойной цилиндрической стенке ГУ 1-го рода

На внутренней и внешней границах многослойной цилиндрической стенки заданы ГУ 1- рода. Найдем тепловой поток и температурный профиль многослойной цилиндрической стенки, рис.8
Как показано выше линейна плотность потока постоянна в любом цилиндрическом сечении и может быть
Выражена через линейные термические сопротивления каждого слоя

$q = \pi \dfrac{T_1 - T_2}{R_{\lambda 1}^c}$,

$q = \pi \dfrac{T_2 - T_3}{R_{\lambda 2}^c}$

…..

$q = \pi \dfrac{T_N - T_{N+1}}{R_{\lambda N}^c}$

Аналогично плоской многослойной стенке.

$T_1 - T_2 = q R_{\lambda 1}^c / \pi$ (18)

$T_2 - T_3 = q R_{\lambda 2}^c / \pi$

……

$T_N - T_{N+1} = q R_{\lambda N}^c / \pi$

Складывая уравнения получим $T_1 - T_{N+1} = (q/\pi)(R_{\lambda 1}^c + R_{\lambda 1}^c + \ldots + R_{\lambda N}^c)$ (19)

⇨ $q = \pi \dfrac{T_1 - T_{N+1}}{R_{\lambda 1}^c + R_{\lambda 1}^c + \ldots + R_{\lambda N}^c}$ (20)

Аналогично плоской системе вычислив поток q по (20) последовательно рассчитываем температуры на границе слоев начиная с наименьшей или наибольшей.

$T_N = T_{N+1} + q R_{\lambda N}^c / \pi$, …, $T_2 = T_3 + R_{\lambda 2}^c / \pi$, $T_1 = T_2 + q R_{\lambda 1}^c / \pi$

Аналогично плоскому слою суммарное термическое сопротивление цилиндрической системы –

Сумма термических сопротивлений всех слоев - $R^c = R^c_{\lambda 1} + R^c_{\lambda 1} + ... + R^c_{\lambda N}$.

Эффективный (эквивалентный) коэффициент теплопроводности $\lambda^c_{эфф}$ вводится так, что полное термическое сопротивление определенное для слоя через $\lambda^c_{эфф}$ равно суммарному термическому сопротивлению

$$R^c_\lambda = \frac{\ln(r_{N+1}/r_1)}{2\cdot\lambda^c_{эфф}} = R^c_{\lambda 1} + R^c_{\lambda 2} + ... + R^c_{\lambda N} \quad \Rightarrow \quad \lambda^c_{эфф} = \frac{\ln(r_{N+1}/r_1)}{\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\ln(r_{i+1}/r_i)}$$

Случай термического сопротивления контакта

По определению термического сопротивления контакта

$$\Delta T_{cont,i} = \overbrace{\underbrace{q}_{\substack{линейная\\плотность\\потока}} \quad \frac{1}{2\pi\, r_i}}^{плотность\ потока} R^c_{cont,i} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\pi\Delta T_{cont,i}}{2 r_i R^c_{cont,i}}$$

Т.о. для всей стенки:

$$q = \frac{\pi(T_1 - T_{N+1})}{\sum_i \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\lambda_i} + \sum_i \frac{R^C_{cont,i}}{2\, r_i}}$$

Случай ГУ 3-го рода

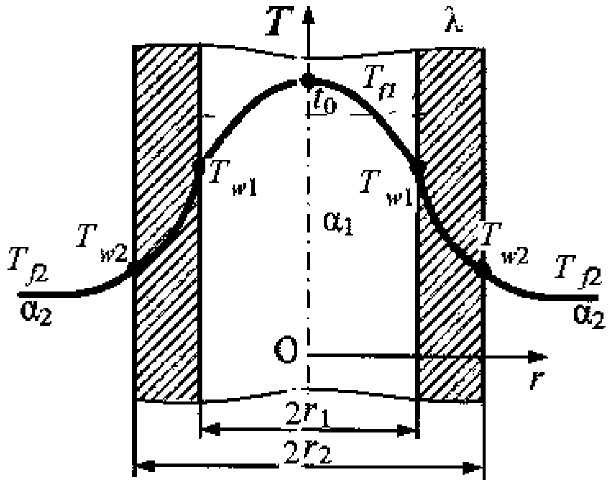

Рис.9. Профиль температуры в цилиндрической стенке ГУ 3-го рода

Задача о теплопроводности цилиндрических стенках при ГУ 3-го рода, по сути является задачей О теплопередаче от теплоносителя протекающего в трубе к теплоносителю снаружи трубы.
Считаем задачу стационарной и одномерной, рис.9.
Рассмотрение задачи аналогично соответствующей задаче в плоской системе.

Ключевым фактором задачи является постоянство плотности линейного теплового потока q в системе.
Из закона теплоотдачи Ньютона-Рихмана (плотность потока умножаем на периметр чтобы получить линейный поток)

$q = \alpha_1(T_{f1} - T_1)2\pi r_1$ - на внутренней поверхности тубы,

$q = \alpha_2(T_2 - T_{f2})2\pi r_2$ - на внешней поверхности трубы. (21)

$q = \dfrac{\pi(T_1 - T_2)}{R^c_\lambda}$ - в стенке.

Отсюда

$$\begin{cases} T_{f1} - T_1 = q/(2\pi r_1 \alpha_1) \\ T_1 - T_2 = q R_\lambda^c / \pi \\ T_2 - T_{f2} = q/(2\pi r_2 \alpha_2) \end{cases}, \qquad (22)$$

$$\Rightarrow \quad T_{f1} - T_{f2} = \frac{q}{\pi}\left(R_\lambda^c + \frac{1}{2r_1\alpha_1} + \frac{1}{2r_2\alpha_2} \right) \qquad (23)$$

$R_{HT}^c = R_\lambda^c + \dfrac{1}{2r_1\alpha_1} + \dfrac{1}{2r_2\alpha_2}$ - линейное термическое сопротивление теплопередаче.

$R_{\alpha 1}^c = \dfrac{1}{2r_1\alpha_1}$ - линейное сопротивление теплоотдачи внутренней стенки.

В отличие от плоской стенки сопротивление теплопередачи зависит и от радиусов.
Обратная R_{HT}^c величина - линейный коэффициент теплопередачи.

Т.О. алгоритм решения задачи:

1) находим q из (23): $q = \dfrac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{R_\lambda^c + \dfrac{1}{2r_1\alpha_1} + \dfrac{1}{2r_2\alpha_2}}$

2) Последовательно рассчитываем температуры стенок по (22).

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{f1} - q/(2\pi r_1 \alpha_1) \\ T_2 &= T_1 - q R_\lambda^c / \pi \end{aligned},$$

где $R_\lambda^c = \dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{2\lambda}$ линейное термическое сопротивление слоя, (16).

Для *многослойных стенок* все аналогично, кроме того, что линейное сопротивление теплопередачи рассчитывается как сумма большего количества термических сопротивлений слоев

$$R_{HT}^c = \sum_i R_{\lambda i}^c + \frac{1}{2r_1\alpha_1} + \frac{1}{2r_N\alpha_N}$$

Случай тонких стенок

Если толщина стенки мала по сравнению с диаметром цилиндра, То расчет теплового потока и температурного профиля очень близок к случаю плоской стенки. Это легко показать разложив в ряд величину термического сопротивления

$$\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{r_2}{r_1}-1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)^2+\ldots\right) \qquad (24)$$

Если $r_2/r_1\approx 1$, то ограничимся первым членом ряда $\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}\cong\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)=\frac{1}{2\lambda}\frac{r_2-r_1}{r_1}=\frac{1}{2\lambda}\frac{L}{r_1}$

Переходя от линейного термического сопротивления к удельному умножением на $2\pi\cdot r_1$ получим термическое совпадающее с выражение термического сопротивления плоской стенки.

Поэтому для расчета теплопередачи тонкой цилиндрической стенки можно использовать формулы для плоской стенки при этом если $r_2/r_1<2$, погрешность не превысит 4 %.

Критический диаметр цилиндрической стенки и эффективность теплоизоляции

Пусть коэффициенты теплоотдачи α_1, α_2, коэффициент теплопроводности и внутренний диаметр трубы не меняются, но увеличивается толщина трубы (внешний радиус r_1)

Тогда сопротивление теплоотдачи на внутренней стенке $R^c_{\alpha 1}=\frac{1}{2r_1\alpha_1}$ не меняется,

Сопротивление теплопроводности $R^c_{\lambda}=\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\lambda}$ растет,

сопротивление теплоотдачи наружной стенки $R^c_{\alpha 2}=\frac{1}{2r_2\alpha_2}$ - падает.

Общее сопротивление теплопередаче - немонотонная функция.

Найдем минимум сопротивления: $\frac{d}{dr_2}\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\lambda}+\frac{1}{2r_2\alpha_2}\right]=0$ ➔ $r_2^{crit}=\lambda/\alpha_2$ (25)

Найденный радиус называется - критический внешний радиус.

При $r_1<r_2<r_2^{crit}$ - общее термической сопротивление теплопередаче падает,

При $r_2^{crit}<r_2$ - общее термической сопротивление теплопередаче растет,

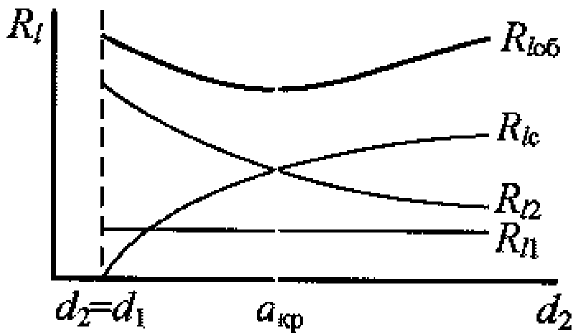

Рис.10. Критический диаметр изоляции трубы

Рассмотрим трубу со слоем теплоизоляции.

$$R^c_{HT}=\frac{1}{2r_1\alpha_1}+\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\lambda}+\underbrace{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\lambda_{isol}}+\frac{1}{2r_3\alpha_2}}_{изоляция} \qquad (26)$$

Рассматривая два слагаемых определяемых изоляцией (26) аналогично придем к выводу, что с ростом r_3, сопротивление сначала падает, а после достижения критического значения - растет.

Т.о. выбирая теплоизолирующее покрытие трубы необходимо рассчитать критический радиус слоя изоляции $r_{isol}^{crit} = \lambda_{isol} / \alpha_2$. Если радиус трубы больше $r_{tube} > r_{isol}^{crit}$, то изоляция увеличит термическое сопротивление.Если радиус трубы меньше критического радиуса $r_{tube} < r_{isol}^{crit}$, то работать как теплоизоляция слой начнет только когда его радиус превысит r_{isol}^{crit}, рис.11.

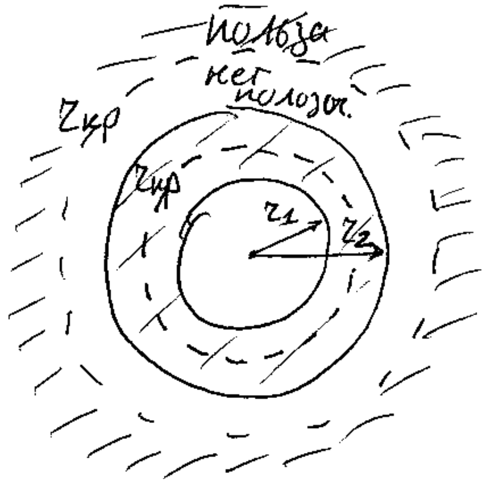

Рис.11. Эффективность теплоизоляции трубы

п.3. Стационарное температурное поле в сферической симметрии

Приведем решение УТ в сферической симметрии с ГУ 1 -го рода.
Как и раньше предполагаем 1) постоянство коэффициента теплопроводности,
2) отсутствие внутренних источников.
Для одномерной системы в стационаре УТ (см. лапласиан в цилиндрических координатах):

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0 . \qquad (27)$$

Общее решение (27) имеет вид $T = \frac{c_1}{r} + c_2$. (Ур-е (12) записывается в виде $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$ и последовательно два раза интегрируется)

Заданы ГУ

$$\begin{matrix} T(r = r_1) = T_1 \\ T(r = r_2) = T_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = c_1 / r_1 + c_2 \\ T_2 = c_1 / r_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 - T_1 = c_1(1/r_2 - 1/r_1) \\ c_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{1/r_2 - 1/r_1} \\ c_2 = T_1 - \dfrac{1}{r_1} \cdot \dfrac{T_2 - T_1}{1/r_2 - 1/r_1} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{T_2 - T_1}{1/r_2 - 1/r_1} \cdot \frac{1}{r} + T_1 - \frac{1}{r_1} \cdot \frac{T_2 - T_1}{1/r_2 - 1/r_1} \qquad (28)$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1/r_2 - 1/r_1}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right] \qquad (29)$$

Т.о. распределение температуры в сферической стенке нелинейное – гиперболическое.
Плотность теплового потока уменьшается с увеличением радиуса (как и для цилиндрической стенки).

Полный поток теплоты (не удельный) $Q=-\lambda \frac{dT}{dr} A$, (30)

Из (29) ➔ $\frac{dT}{dr}=-\frac{T_1-T_2}{1/r_2-1/r_1}\cdot\frac{1}{r^2}$,

Площадь сферической площадки $A=4\pi r^2$.

Т.О. $$Q=-4\pi\lambda\frac{T_1-T_2}{1/r_2-1/r_1}\cdot, \qquad (31)$$

Из (31) ➔ полный поток пересекающий сферическую границу – не зависит от радиуса

Аналогично предыдущему разделу вводим понятие термического сопротивления сферического слоя $R_\lambda^S=\frac{r_2-r_1}{4\lambda r_2 r_1}$, так, что $Q=-\pi\frac{T_1-T_2}{R_\lambda^S}\cdot$

Случай многослойной сферической стенки

Пусть на многослойной сферической стенке заданы ГУ 1 –го рода.
Потоки одинаковы на всех границах:

$$Q=\pi\frac{T_1-T_2}{R_{\lambda 1}^S}\cdot,\quad Q=\pi\frac{T_2-T_3}{R_{\lambda 2}^S}\cdot,\ \ldots\ldots,\quad Q=\pi\frac{T_N-T_{N+1}}{R_{\lambda N}^S}\cdot \qquad (32)$$

Следовательно

$$T_1-T_2=Q\cdot R_{\lambda 1}^S/\pi,\quad T_2-T_3=Q\cdot R_{\lambda 2}^S/\pi,\ \ldots..,\ T_N-T_{N+1}=Q\cdot R_{\lambda N}^S/\pi. \qquad (33)$$

Суммируя (33) $T_1-T_{N+1}=\frac{Q}{\pi}\cdot\sum_i^N R_{\lambda i}^S$ ➔ $Q=\pi\frac{T_1-T_{N+1}}{\sum_i^N R_{\lambda i}^S}\cdot$ (34)

Алгоритм нахождения температурного поля аналогичен случаю цилиндрической стенки:
1) рассчитываем термическое сопротивление каждого слоя и суммарное термическое сопротивление,
2) рассчитываем тепловой поток (34),
3) последовательно пересчитываются температуры на границах слоев по (33).

Случай термического сопротивления контакта

По определению термического сопротивления контакта

$$\Delta T_{cont,i} = \underbrace{\overbrace{Q \frac{1}{4\pi r_i^2}}^{плотность\ потока}}_{\substack{полный\\поток}} R_{cont,i} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\pi \Delta T_{cont,i}}{\dfrac{R_{cont,i}}{4 r_i^2}}$$

Т.о. в случае наличия термического сопротивления между слоями суммарное термическое сопротивление системы запишем в виде

$$R_{\Sigma}^{S} = \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{1}^{N} \frac{r_2 - r_1}{\lambda r_2 r_1}}_{сопротивление\ слоев} + \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{j}^{M} \frac{R_{cont,j}}{r_j^2}}_{\substack{птерм.сопротивление\\контактов}},$$

Соответственно выразится полный поток

$$Q = \frac{\pi (T_1 - T_{N+1})}{\frac{1}{4}\sum_{1}^{N} \frac{r_2 - r_1}{\lambda r_2 r_1} + \frac{1}{4}\sum_{j}^{M} \frac{R_{cont,j}}{r_j^2}}$$

Случай ГУ 3-го рода

Ключевым фактором задачи является постоянство полного теплового потока Q в системе. Из закона теплоотдачи Ньютона-Рихмана (плотность потока умножаем на площадь сферы)

$Q = \alpha_1 (T_{f1} - T_1) 4\pi r_1^2$ - на внутренней поверхности тубы,

$Q = \alpha_2 (T_2 - T_{f2}) 2\pi r_2^2$ - на внешней поверхности трубы. (21)

$Q = \dfrac{\pi (T_1 - T_2)}{R_{\lambda}^{S}}$ - в стенке.

Отсюда

$$\begin{cases} T_{f1} - T_1 = Q/(4\pi r_1^2 \alpha_1) = Q R_{HT1}^{S}/\pi \\ T_1 - T_2 = Q R_{\lambda}^{S}/\pi \\ T_2 - T_{f2} = Q/(4\pi r_2^2 \alpha_2) = Q R_{HT2}^{S}/\pi \end{cases},$$

Общее термическое сопротивление системы запишем как сумму термических сопротивлений теплоотдачи поверхности и сопротивления слоя

$$R_{\Sigma}^{S} = R_{\lambda}^{S} + R_{HT1}^{S} + R_{HT2}^{S} = \frac{r_2 - r_1}{4\lambda r_1 r_2} + \frac{1}{4r_1^2\alpha_1} + \frac{1}{4r_2^2\alpha_2}\ .$$

Для многослойных систем и систем с термическими сопротивлениями вся процедура нахождения температурного профиля (температур на границах слоев – аналогична.

Качественная особенность термического сопротивления сферической стенки

Особенность сферической стенки заключается в том, что с увеличением толщины стенки ее термическое сопротивление *не растет*. Иными словами никакой большой толщиной теплоизоляции невозможно обратить теплопотери в нуль

Действительно $R_{\lambda}^{S} = \dfrac{r_2 - r_1}{4\lambda r_2 r_1}$, а следовательно $\lim_{r_2\to\infty} R_{\lambda}^{S} = \dfrac{1}{4\lambda r_1}$

Для цилиндра $R_{\lambda}^{c} = \dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{2\lambda}$ $\lim_{r_2\to\infty} R_{\lambda}^{C} = \infty$