Тема 25.ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ (ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ)

п.1. Цель и задачи теории подобия

Важнейшей задачей любого моделирования физических задач является обобщение результатов моделирования на возможно больший круг сходных (подобных.) явлений.

С другой стороны экспериментальные данные, полученные в модельном эксперименте (например, градирня высотой 1 метр) желательно распространить на более широкий круг условий (градирни натуральной величины).

Как этого достичь и какие явления считать подобными?
Вопрос нетривиальный, он разрабатывался в течение длительного времени, начиная от Ньютона и заканчивая серединой 20-го века и был крайне актуален вплоть до эры вычислительных машин. Многие ученые внесли свой вклад в теорию подобия, о чем свидетельствуют безразмерные критерии (числа подобия) названные именами этих ученых, относящиеся к разнообразным задачам.
Вопрос Что такое подобные геометрические фигуры? Ответ относительно легко сформулировать.
А какие процессы нагрева литейных заготовок можно считать подобными? Это уже труднее.

Общий ответ на поставленный вопрос. (Смотри пункт Теоремы подобия) ***Подобными*** назовем процессы одной физической природы (одинаковые управляющие уравнения) для которых в обобщенных (обезразмеренных) уравнениях, описывающих процесс, все возможные безразмерные комплексы равны.

Отсюда и названия этих безразмерных комплексов - *критерии подобия* или *числа подобия*

Опр. ***Теория подобия*** – раздел физики (прежде всего теории тепломассообмена) разрабатывающий методы и правила использования безразмерных параметров для обобщенного описания физических (теплофизических) процессов.

п.2. Система величин и система единиц

Физические величины - это физические сущности, при помощи которых описывается физическая картина мира (длина, масса, время, электрический ток, температура..). Для количественного описания физических величин используются единицы измерения.

Единицы измерения – по сути это эталоны, масштабы для количественного определения физических величин

Система единиц СИ основана на Международной системе величин ISQ (International System of Quantities) в которой приняты 7 основных величин – длина (L), Масса (M), время (τ), термодинамическая температура (T), электрический ток (A), количество вещества (N), сила света (I). Другие величины – производные от основных.

Каждой величине соответствует свой масштаб – единица измерения. Поэтому, естественно, в международной системе единиц СИ (1960 г) также 7 основных единиц измерения- L [м], M [*кг*], τ [сек], T [К], A ампер [А], количество вещества N [моль], сила света I кандела [кд], а остальные единицы являются производными от основных, но также считаются частью системы СИ. Производные величины - Сила [Н], энергия [Дж], мощность [Вт], давление [Па] и т.д. (всего их 19) производные получаются произведением основных, например, [Вт]= [кг*м/сек^2].

Очевидно в любой совокупности физических величин не может быть больше 7 независимых размерностей, поскольку любая размерность может быть выражена через 7 основных как произведение последних $[\forall размерность] = [м^{\alpha} кг^{\beta} сек^{\chi} K^{\delta} A^{\varepsilon} моль^{\gamma} кд^{\eta}]$

В механике используется 3 величины - L, M, τ и следовательно 3 независимых единицы измерения.

В задачах тепломассообмена – 4 вели чины - $L, M, \tau + T$ и ➔ 4 независимых единицы измерения.

п.3. Пи- теорема

Формулировка и первое доказательство относят Жак Бертран (1878 г). Иногда называют теоремой Бакингема или Ваши' и Рэлея (делали формулировки и использования)

> ***<u>Пи- теорема</u>**. Si имеется зависимость между n физическими величинами, не меняющая своего вида при изменении масштабов единиц, то она эквивалентна зависимости между меньшим числом p=n-k безразмерных величин, где k - число величин с независимыми размерностями среди n исходных величин.*

<u>Доказательство.</u> Пусть ∃ зависимость $f(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n) = 0$ вид $f(x_1, .., x_n)$ не меняется при переходе к различным единицам измерения, (т.е переход к разными единицам сводится только к изменению коэффициентов при переменных $\{x_1, .., x_n\}$ -например как зависимость центробежной силы от скорости, удельной тяги от параметров топлива и сопла, дальность полета стрелы от угла выстрела, плотности воздуха, массы стрелы…).

Выберем среди $\{x_1, .., x_n\}$ k переменных с независимыми размерностями, а и остальные с размерностями, выражающимися через первые k :

$$f(\underbrace{x_1, ..., x_k}_{\substack{k-\text{параметра}\\ \text{независимыми}\\ \text{размерностями}}}, \underbrace{x_{k+1}, .., x_n}_{\substack{p=n-k-\text{параметра}\\ \text{с зависимыми}\\ \text{размерностями}}}) = 0 \qquad (1)$$

В механических задачах всего 3 независимых величины и, соответственно независимых единиц размерности: L - метры, τ - секунды, M - килограммы. В теплофизических задачах - 4 (+ T градусы температуры), т.е. $k = 4$

Все p переменных можно привести к безразмерному виду разделив их на определенные степени первых k переменных $\pi_i = \dfrac{x_i}{x_1^\alpha x_2^\beta ... x_k^\gamma}$.

Тогда ту же физическую зависимость (закономерность) можно представить в виде

$$F(\underbrace{x_1, .., x_k}_{\substack{k-\text{параметрас}\\ \text{независимыми}\\ \text{размерностями}}}) = \varphi(\underbrace{\pi_{k+1}, .., \pi_n}_{\substack{p=n-k-\text{безразмерных}\\ \text{комплекса}}})$$

Для любого конкретного значения величин $\{x_1, x_2, ... x_k\}$ можно выбрать некоторую систему единиц измерения (альфа-метры, бетта-секунды, гамма-килограммы и т.д.) в которой $\underbrace{x_1 = x_2 = ... = x_k}_{\text{независимые}} = 1$. ***При непрерывном изменении параметров теоретически можно непрерывно менять систему единиц***. При этом значение безразмерных комплексов будет оставаться постоянным. Следовательно, для любого фиксированного набора значений $\{x_1, x_2, ... x_k\}$, а также и при их непрерывном изменении, можно поддерживать тождество $\Phi(\underbrace{\pi_{k+1}, .., \pi_n}_{p=n-k-\text{штук}}) = F(\underbrace{1,1,..,1}_{k-\text{штук}})$.

Но функции от постоянных параметров всегда можно приписать постоянное значение: $F(\underbrace{1,1,..,1}_{k-\text{штук}}) = const$. Поэтому без потери общности можем записать

$$f(\underbrace{\pi_{k+1}, .., \pi_n}_{\substack{p-\text{безразмерных}\\ \text{комплекса}}}) = 0 \quad \text{или} \quad \pi_1 = f_1(\underbrace{\pi_2, .., \pi_p}_{\substack{p-1-\text{безразмерные}\\ \text{переменные}}})$$ (здесь для удобства изменена нумерация) .

Упражнение Пусть $\exists$ гипотетическая зависимость для коэффициента теплоотдачи твердого тела $h = a_1 u + a_2 \lambda + a_3 d + a_4 c + a_5 \rho + a_6 \nu$, где все параметры относятся к жидкой среде $u, \lambda, d, c, \rho, \nu$ скорость, коэффициент теплопроводности, размер тела, теплоемкость, плотность, кинематическая вязкость.
Составить безразмерные комплексы из величин входящих в формулу.

Применение Пи – теоремы.

А) Системы с p=1 безразмерным комплексом. Пусть какая-либо физическая величина зависит от числа параметров, равного числу независимых размерностей и их размерности независимы. Т.е. $\exists$ зависимость вида $q = f(x_1,..,x_k)$ и все аргументы имеют независимые размерности.

Согласно Пи- теореме можно построить безразмерный комплекс $\pi = \dfrac{q}{x_1^\alpha x_2^\beta ... x_k^\gamma}$ так, что

$$\pi = const \;\Rightarrow\; \pi = \frac{q}{x_1^\alpha x_2^\beta ... x_k^\gamma} = const \;\Rightarrow\; q = const \cdot x_1^\alpha x_2^\beta ... x_k^\gamma .$$

> Вопрос. А если аргументов меньше чем число независимых величин? Можно ли точно так же построить безразмерный комплекс и определить качественную зависимость искомой величины?
> *Тогда построить безразмерный комплекс может не удастся.*

> Задача. Определить частоту колебаний маятника, если она (частота) зависит от длины подвеса, массы груза, ускорения свободного падения g?

> Задача. Определить частоту подскока абсолютно упругого мяча если она (частота) зависит от высоты падения, массы груза, ускорения свободного падения g?

Б) Физическое моделирование. Если для каких-то двух экспериментов одинаковой природы все параметры (зависимые и независимые) сведены к безразмерным комплексам

$$\pi = F_1(\underbrace{\pi_1,..,\pi_{p-1}}_{p-1})$$

$$\pi = F_2(\underbrace{\pi_1,..,\pi_{p-1}}_{p-1})$$

Если значения всех *p-1* комплексов совпадают (в этом случае совпадает и комплекс π), то эксперименты и процессы полностью подобны. В этом случае можно переносить результаты, экспериментов на одной установке (например, уменьшенной копии установки) на полномасштабную систему. Например, оптимизация лабораторной градирни, или лабораторные испытания самолета или подводной лодки.

Число безразмерных комплексов будет связано с общим числом зависимых и независимых параметров в экспериментах. Выдержать равенство дного-двух-трех комплексов для двух разномасштабных систем технически возможно (например, меняя скорость и вязкость жидкости одновременно, сохраняем значение числа Re), однако выдержать равенство десятка комплексов – практически невозможно. Поэтому речь может идти о частичном подобии экспериментов.

С) Теплопроводность.

В задаче теплопроводности с ГУ 3-го рода - 9 параметров (переменные + условия однозначности) - $T, t, x, T_0, T_1, a, \lambda, h, L$ (T_0 - ГУ, T_1 - НУ). 4 независимые размерности $\Rightarrow$ могут быть построены 5 безразмерных комплекса связанных зависимостью. Выберем следующие безразмерные комплексы T/T_0, x/L, Fo, Bi, T_1/T_0. Решение представимо в виде

$$\frac{T}{T_0} = F(\ x/L,\ \ Fo,\ Bi, T_1/T_0)$$

В задаче теплопроводности с ГУ 2-го рода с заданным НУ - 8 параметров (переменные + условия однозначности) - $T, t, x, T_1, a, \lambda, q_0, L$ (T_1 - НУ). 4 независимые размерности ➔ могут быть построены 4 безразмерных комплекса связанных зависимостью. Выберем следующие безразмерные комплексы $T/T_1,\ x/L,\ Fo,\ \tilde{q} = \dfrac{qL}{\lambda T_0}$. Решение, если оно не зависит от координаты и времени, представимо в виде

$$\frac{T}{T_1} = F(\ x/L,\ \ Fo,\ \tilde{q}).$$

В задаче теплопроводности с ГУ 1-го рода с заданным НУ - 7 параметров (переменные + условия однозначности) - T, t, x, T_0, T_1, a, L (T_0 - ГУ, T_1 - НУ). 3 независимые размерности (нет массы которая входит в производную единицу Дж) ➔ могут быть построены 4 безразмерных комплекса, связанных зависимостью $\dfrac{T}{T_0} = F(\ x/L,\ \ Fo,\ \dfrac{T_1}{T_0})$.

п.4. Обобщенные переменные задач теплообмена

В п.1. было указано, что для определения подобных явлений (процессов) нужно анализировать безразмерные комплексы, через которые выражаются закономерности явлений (процессов).

Рассмотрим метод построения этих комплексов.

<u>Опр.</u> ***Безразмерные комплексы***, называемые также ***обобщенными переменными*** - переменные, составленные из всех параметров физической задачи и имеющие смысл безразмерной оценки интенсивности (масштабов) важных для задачи физических процессов.

<u>*Метод 1. «Относительных операторов».*</u>

Дифференциальные операторы задач тепло-массообмена соответствуют тем или иным физическим процессам. 1) Строятся относительные (безразмерные) операторы, 2) приводятся к алгебраическим аналогам, 3) выражения приводятся к безразмерным комплексам.

Число критериев подобия полученных из дифференциального уравнения - на 1 меньше числа членов уравнения.

Пример. Задача о теплопроводности твердого тела, взаимодействующего со средой.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$h\Delta T = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (2)$$

Строим относительный безразмерный «оператор»: $a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Строим алгебраический аналог: $\dfrac{\partial T}{\partial t} \sim \begin{bmatrix}\Delta T & \text{характерный}\\ \Delta x & \text{характерный}\end{bmatrix} \sim \dfrac{\Delta T}{\Delta t}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \begin{bmatrix}\Delta T & \text{характерный}\\ \Delta x & \text{характерный}\end{bmatrix} \sim \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) \sim \frac{\Delta T}{\Delta x^2}$$

Масштабы для оценки выбирается из условий однозначности задачи т.е. не связанны с ее решением. Масштаб (характерное значение) в принципе характеризует амплитуду данной величины в задаче.

Подставляем масштаб параметров в алгебраический аналог оператора:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{\Delta T^*}{\Delta t^*},\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta T^*}{\Delta x^{*2}} \Rightarrow a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial T}{\partial t} \sim a\frac{\Delta T^*}{\Delta x^{*2}}\Big/\frac{\Delta T^*}{\Delta t^*} \Rightarrow \frac{a\Delta t^*}{\Delta x^{*2}} = Fo$$ - безразмерное время.

Для ГУ (2) $h\Delta T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$.

Отношение операторов $\alpha\Delta T \Big/ \lambda\frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{a\Delta T^*}{\lambda\Delta T^*/\Delta x^*} \Rightarrow \frac{h\Delta x^*}{\lambda} \equiv Bi$ - безразмерная теплоотдача.

Аналогично Bi выводится и число Нуссельта $h\Delta T \Big/ \lambda_f\frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{h\Delta T^*}{\lambda_f\Delta T^*/\Delta x^*} \Rightarrow \frac{h\Delta x^*}{\lambda_f} \equiv Nu$

но Нуссельт строится по теплопроводности протекающей жидкости как граничное условия для задачи конвекции.

<u>*Метод2. «Прямого обезразмеривания дифференциальных уравнений».*</u>

Обезразмеривание проводится введением масштабов для всех зависимых и независимых переменных

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{T_0}{\tau_0}\frac{\partial(T/T_0)}{\partial(t/\tau_0)} = a\frac{\partial^2(T/T_0)}{\partial(x/x_0)^2}\cdot\frac{T_0}{x_0^2} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = Fo\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2},$$

Где $\theta = \frac{T}{T_0}$, $\xi = \frac{x}{x_0}$, $Fo = \frac{a\tau_0}{x_0^2}$.

<u>Упражнение</u>. Безразмерные комплексы уравнений Навье- Стокса.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta u + \vec{g} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla(\rho_g u) = 0$$

Безразмерный оператор ➔	алгебраический аналог ➔	масштабы из условий однозначности	Критерий подобия
$\dfrac{(u\cdot\nabla)u}{\frac{1}{\rho}\nabla p}$	$\dfrac{\rho\cdot u\cdot\Delta u/\Delta x}{\Delta p/\Delta x}$	$\dfrac{\rho\cdot u_0^2}{\Delta p} \equiv \dfrac{1}{Eu}$	число *Эйлера* безразмерное давление
$\dfrac{(u\cdot\nabla)u}{\nu\Delta u}$	$\dfrac{u\cdot\Delta u/\Delta x}{\nu\cdot\Delta u/\Delta x^2} = \dfrac{u\cdot\Delta x}{\nu}$	$\dfrac{u_0 L}{\nu} \equiv \mathrm{Re}$	число *Рейнольдса* отношение инерционных сил к вязким силам
$\dfrac{(u\cdot\nabla)u}{g}$	$\dfrac{u\cdot\Delta u/\Delta x}{g} = \dfrac{u^2}{g\Delta x}$	$\dfrac{u_0^2}{gL} \equiv Fr$	число *Фруда* отношение инерционных и объемных массовых сил
Уравнение энергии в движущейся среде	$\dfrac{\partial T}{\partial t} + (u\cdot\nabla)T = \alpha\Delta T$		
$\dfrac{(u\cdot\nabla)T}{\alpha\Delta T}$	$\dfrac{u\cdot\Delta T/\Delta x}{\alpha\cdot\Delta T/\Delta x^2} = \dfrac{u\cdot\Delta x}{\alpha}$	$\dfrac{u_0 L}{\alpha} \equiv Pe$	число *Пекле* отношение конвективного переноса к переносу теплопроводностью

Комбинации безразмерных комплексов - также безразмерные комплексы.

$$\frac{Pe}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{\alpha} \equiv \mathrm{Pr}$$ - число Пекле (отношение вязкости к температуропроводности)

Для конвекции

$$\frac{\mathrm{Re}^2}{Fr} = \frac{gL^3}{\nu^2} \equiv Ga$$ - число Галилея (отношение сил гравитации и сил вязкости).

$Ga\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \equiv Ar$ - число Архимеда; $Ga\beta\Delta T \equiv Gr$ - число Грасгофа (отношение сил Архимеда и сил вязкости).

Числа Архимеда и Грасгофа связаны по физическому смыслу т.к. $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \sim \beta\Delta T$,

Где $\beta = \dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dT}$ - коэффициент теплового объемного расширения [1/К].

$Gr \cdot \mathrm{Pr} \equiv Ra$ - число Релея (отношение сил Архимеда и сил вязкости с учетом температуропроводности).

п.5. Виды критериев подобия

Опр. Критерии подобия, выраженные через величины, содержащиеся в условиях однозначности и характеризующие отношения масштабов различных процессов называются ***определяющими критериями*** **подобия.**

Определяющие критерии могут быть вычислены при постановке задачи без ее решения.

Опр. Отношения величин из условий однозначности к масштабам этих величин той же физической природы называют ***параметрическими критериями***. $\dfrac{l_1}{l_0}$, $\dfrac{T_1}{T_0}$,

Опр. Комплексы имеющие вид критериев, но содержащие переменную величину называются ***неопределяющими критериями***.

Неопределяющие критерии нельзя использовать как признаки подобия задач и процессов.

Например, $\mathrm{Re}_x = \dfrac{x \cdot u}{\nu}$, $Fo_\tau = \dfrac{a \cdot \tau}{L^2}$.

п.6. Теоремы подобия

<u>Первая теорема подобия</u> (разработана Ньютоном). Подобные процессы и явления имеют одинаковое значение чисел (критериев) подобия, составленных из параметров, определяющих данное явление или процесс.

Вторая теорема подобия, доказана Букингемом. Числа подобия, полученные из дифференциальных уравнений одновременно являются и числами подобия, для решений (интегралов) этих уравнений. *Или* решение дифференциального уравнения может быть представлено как функция чисел подобия дифференциального уравнения.

Третья теорема подобия (теорема Кирпичева-Гухмана). Необходимым и достаточным условием подобия процессов является подобие условий однозначности (геометрия, НУ, ГУ, управляющие уравнения) и равенство критериев подобия, составленных из условий однозначности.

п.7. Решения задач теплообмена в безразмерном виде

Александр Адольфович Гухман (1897-1991) «Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена» М.: Наука 1974.

На основе Пи-теоремы доказано, что для задачи о теплопроводности в твердом теле для ***нестационарного периодического процесса*** с заданными НУ и ГУ решение может быть найдено в виде

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, Fo, Bi\right),$$

$Fo = \dfrac{\tau_0 \cdot x}{l_0^2}$ - безразмерное время, $Bi = \dfrac{\alpha \cdot l_0}{\lambda}$ - безразмерный коэффициент теплоотдачи, θ_0, τ_0, l_0 - масштабы из условий однозначности задачи.

В случае ***нескольких масштабов длины*** задачи в решение войдет несколько параметрических чисел подобия $P_1 = \dfrac{l_0}{l_1}$, $P_2 = \dfrac{l_0}{l_2}$ и т.д.

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, Fo, Bi, P_1, P_2, \ldots\right).$$

Для ***нестационарной апериодической*** задачи (нет масштаба времени)

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f\left(\frac{x}{l_0}, Fo_\tau, Bi, P_1, P_2, \ldots\right), \quad Fo_\tau = \frac{\tau \cdot a}{l_0^2}$$ - неопределяющий критерий.

Для ***стационарного*** 1-мерного случая

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f\left(\frac{x}{l_0}, Bi, P_1, P_2, \ldots\right)$$

Обобщенная зависимость для определения локального коэффициента теплоотдачи α при ***стационарной вынужденной конвекции*** примет вид

$$Nu = f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, P_1, P_2, \ldots\right), \quad \text{Где } Nu = \frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda},\ \mathrm{Re} = \frac{u \cdot l_0}{\nu},\ \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Для ***свободной стационарной конвекции***

$$Nu = f_2\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, Gr, P_1, P_2, \ldots\right), \quad \text{Где } Gr = \frac{g l_0^2 \beta (T_w - T_f)}{\nu^2}.$$

п.8.