

Тема 26. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

п.1. Понятия конвективного теплообмена п. п.5. Ур-я динамического погранслоя
 п.2. Понятие о пограничном слое п.6. Интегральное ур-е Кармана
 п.3. Переход к турбулентному течению п.7. Тепловой погранслою
 п.4. Толщина вытеснения и толщина потери импульса Решение интегрального ур-я для ламинарного погранслоя
 Связь теплоотдачи и трения. Тройная аналогия Полуэмпирические формулы теплоотдачи

п.1. Понятия конвективного теплообмена

Опр. Теплоотдача – процесс переноса тепловой энергии от твердой поверхности в окружающую среду, в частности, в обтекающую жидкость (газ).

Основной эмпирический закон – закон Ньютона-Рихмана $Q = hA(T_0 - T_1)$

h - коэффициент теплоотдачи [Вт/м²/К], A – площадь поверхности теплоотдачи, T_0, T_1 - температура стенок и жидкости.

Физический смысл h – поток теплоты при перепаде температуры $\Delta T = T_0 - T_1 = 1 \text{ K}$.

В общем случае h - локально, т.е. зависит от точки к точке.

Для всей поверхности используем среднее значение $\bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h \cdot dA$ и $Q = \bar{h}A(T_0 - T_1)$.

h зависит от →	характера движения →	ламинарный турбулентный стационарное нестационарное
	типа жидкости →	газ жидкость жидкий металл
	типа конвекции →	естественная вынужденная
	Обработки/ качества поверхности	
	Присутствия фазовых превращений	

Вынужденная конвекция – ситуация когда скорость движения определяется внешними гидродинамическим условиями или внешним двигателем.

Естественная конвекция возникает за счет нагрева газа вблизи поверхности, возникновением градиентов температуры, плотности и связанными с этим архимедовыми силами.

Естественная конвекция определяется следующими параметрами:

$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p=const}$ - коэффициент объемного расширения, v - удельный объем. Для газа $\beta \cong \frac{1}{T}$.

Для жидкости $\beta \cong \frac{1}{v} \frac{(v - v_l)}{T - T_l}$, где индекс l – жидкость, отсутствие

индекса – стенка.

Тогда: $\frac{dv}{v} = \beta \Delta T$, $\frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho}$.

Объемная сила оценивается: $F = g \cdot (\rho_l - \rho) = g \cdot \beta \rho_l (T - T_l)$

→ Безразмерная оценка интенсивности силы - $\beta \Delta T$

Основные критерии подобия для естественной конвекции - Числа Галилея, Грасгофа, Архимда и Рэлея.

$Ga \cong \frac{Re^2}{Fr} = \frac{gl^3}{v^2}$ - отношение сил гравитации и вязкости,

$Gr = Ga \cdot \beta \Delta T$ - отношение сил Архимеда и вязкости,

$Ar = Ga \cdot \Delta \rho / \rho$ - число Архимеда,

Задача. Найти β для идеального газа.

Задача. Показать, что числа Архимеда и Грасгофа – по сути тождественны.

$Ra = Gr \cdot Pr$ – отношение сил Архимеда и вязкости с учетом температуропроводности.

Число Рэлея – определяет точку неустойчивости в слое с температурным градиентом (т.е. начало естественной конвекции).

п.2. Понятие о пограничном слое

Опр. Погранслоем (ПС) - тонкий слой на поверхности обтекаемого тела в котором проявляются эффекты вязкости, переноса теплоты и массы.

Схема пограничного слоя и локальный коэффициент теплоотдачи

- Значения δ_v и δ_T определяют по значению скорости и температуры 99 % от невозмущенных значений.
- Значения δ_v и δ_T монотонно растут от долей мм до сантиметров.
- Перенос тепла через погранслоем осуществляется теплопроводностью в ламинарном ПС и вязком подслое:

где $\alpha \sim \frac{\lambda}{\delta_T}$ - термическая проводимость ламинарного ПС (обратная величина термич.

сопротивления),

и турбулентной теплопроводностью в турбулентном ПС:

$$\lambda_{турб} \sim c\rho \cdot l_{вихря} \cdot \omega_{пульсаций} \sim c\rho \cdot \delta_T \cdot \omega_\infty$$

Из общих положений теории подобия можно сказать, что все параметры гидродинамического ПС должны зависеть от числа Re (т.к. в стационарной постановке без гравитации ур-е Навье-Стокса задает только 1 безразмерный критерий – Re!).

Ожидаемые зависимости

$$x_{крит} \sim Re_x \sim 100$$

$$\delta_T \sim \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$\delta_{ВП} \sim 1/\sqrt{\text{Re}_x}$$

Детальные сведения о таких зависимостях изучает теория погранслоя. Классическое изложение теории погранслоя см. книгу Г.Шлихтинг «Теория погранслоя».

Пограничный слой в трубе

Ламинарное течение

Турбулентное течение

Специфика описания задачи теплоотдачи в трубе:

- 1) Имеется выход на установившийся режим, когда погранслоем занимает все сечение;
- 2) Число Рейнольдса строится по диаметру трубы и является определяющим критерием;
- 3) Коэффициент теплоотдачи строится по разности температуры стенки и среднemasсовой температуры жидкости (а не T_∞ как при внешнем обтекании)

п.3. Переход к турбулентному течению для некоторых классических задач

При переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения система проходит фазы:

- а) потери устойчивости, начала регулярных пульсаций потока;
- б) хаотизация пульсаций, возникновение различных комбинированных частот пульсаций;
- с) развитая турбулентность с широким спектром пульсаций и размером вихрей вплоть до мелкого т.н. колмогоровского масштаба.

Обтекание пластины	$\text{Re}_x^* \approx 100$ – начало перехода
Протекание в трубе	$\text{Re}_d^* \approx 2000$ – начало перехода $\text{Re}_d^{**} \sim 10^4$ – развитая турбулентность
Обтекание шара	$\text{Re}_d^* \approx 100$ – пульсации течения $\text{Re}_d^{**} \sim 1000$ – развитая турбулентность
Поперечное обтекание трубы	$\text{Re}_d^* \approx 100$ – пульсации течения $\text{Re}_d^{**} \sim 1000$ – развитая турбулентность

Кризис обтекания – явление, заключающееся в резком падении сопротивления при обтекании объекта при превышении критического числа Рейнольдса. Для шара $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$.

При докритическом обтекании угол отрыва пограничного слоя с ростом Re уменьшается. При переходе в надкритический режим угол отрыва резко увеличивается, что обуславливает падение сопротивления обтекания. При дальнейшем росте Re снова плавно уменьшается.

п.4. Толщина вытеснения и толщина потери импульса пограничного слоя

Опр. Толщиной вытеснения называется толщина гипотетического пристенного слоя, расход через который в случае идеального скольжения равен уменьшению расхода в пограничном слое при реальном течении (относительно случая идеального скольжения)

$$w_\infty \delta^* = \int_0^\delta [w_\infty - w_x(y)] dy$$

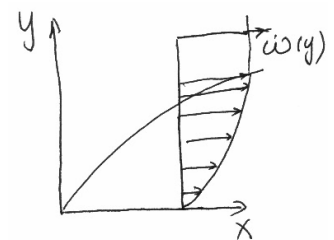
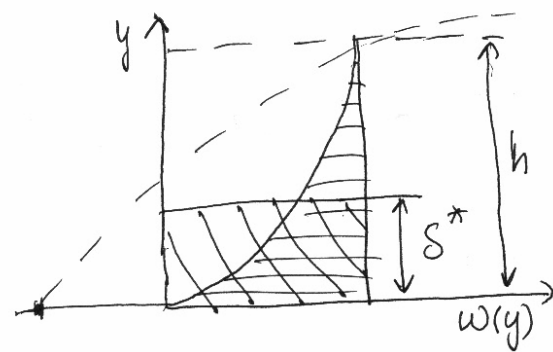
Опр. Толщиной потери импульса называется толщина гипотетического пристенного слоя, поток импульса через который в случае идеального скольжения равен уменьшению потока импульса в пограничном слое при реальном течении (относительно случая идеального скольжения)

$$w_\infty^2 \delta^{**} = \int_0^\delta w_x(y) [w_\infty - w_x(y)] dy$$

Заметим, что устоявшийся термин «потери импульса» не совсем корректен, поскольку в действительности рассматривается поток импульса, а не импульс.

Задача. Оценить скорость автомобиля при котором наступает кризис обтекания.

($v_{воздух} \approx 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{сек}$)



п.5. Уравнения динамического пограничного слоя

Основное справочное пособие книга Шлихтинг «Теория пограничного слоя»

Ур-я Навье- Стокса в векторном виде (ур-е неразрывности для несжимаемой жидкости):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{w} + \vec{g} \quad (1)$$

$$\text{div}(\vec{w}) = 0$$

В двумерном, стационарном случае, без силы тяжести (рис.1) запишем их в проекции на оси:

$$\begin{aligned}
 w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) \quad - \text{проекция на ось } x \\
 w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) \quad - \text{проекция на ось } y
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

Поставим цель – максимально упростить (2). Для этого принимаем гипотезу: 1) $w_y \ll w_x$, 2) $\delta \sim l / \sqrt{\text{Re}_l} \sim \sqrt{l}$ и оценим относительную величину отдельных слагаемых системы (2).

Исходя из гипотезы 1) отбрасываем 2-е уравнение системы (2).

Для оценки величин слагаемых системы (2) обезразмерим уравнения.

В качестве масштабов примем:

$$\left[\begin{array}{l}
 w = w_\infty \quad - \text{невозмущенная скорость} \\
 x = l \quad - \text{расстояние от начала} \\
 y = \delta \quad - \text{толщина погранслоя} \\
 p = \rho w_\infty^2 \quad - \text{удвоенный динамический напор}
 \end{array} \right.$$

Получим

$$\begin{aligned}
 \frac{w_\infty^2}{l} \tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{w_\infty^2}{\delta} \tilde{w}_y \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{w_\infty^2}{l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{w_\infty \nu}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{w_\infty \nu}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_x}{\partial \tilde{y}^2} \quad \times \frac{l^2}{w_\infty \nu} \rightarrow \\
 \rightarrow \text{Re}_l \tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}} + \text{Re}_l \frac{l}{\delta} \tilde{w}_y \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{y}} &= -\text{Re}_l \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + 1 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{l^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_x}{\partial \tilde{y}^2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Из неразрывности $\rightarrow \frac{w_\infty}{l} \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{w_\infty}{\delta} \frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \tilde{y}} = 0 \rightarrow \frac{l}{\delta} \frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \tilde{y}} \sim \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}} \rightarrow \frac{l}{\delta} \partial \tilde{w}_y \sim \partial \tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}} \sim \partial \tilde{w}_x$.

Отсюда следует, что первое и второе слагаемое имеют один порядок величины. Из гипотезы 2) $\rightarrow \frac{l^2}{\delta^2} \sim \text{Re}_l$. Т.О. при $\text{Re}_l \gg 1$ в (3) оставляем 1-е, 2-е, 3-е и 5-е слагаемые имеющие порядок Re_l и пренебрегаем 4-м слагаемым, имеющим порядок 1. \rightarrow

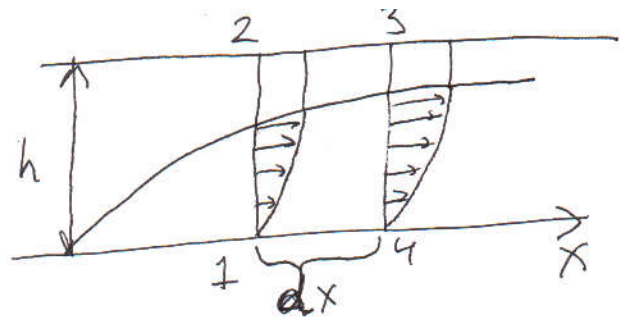
$$\left. \begin{aligned}
 w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad - \text{ур-я погранслоя для } \text{Re}_l \gg 1. \tag{4}$$

Ур-я погранслоя точно решены Блаузиусом 1908 г.

для Г.У. $w_x = w_y = 0$, при $y = 0$; $w_x = w_\infty$, при $y = \infty$

п.6. Интегральное уравнение Кармана для пограничного слоя

(Теодор фон Карман 1881-1963 ученик Прандтля работал в Веннгрии, Германи, США)



Для безградиентного течения ($\frac{dp}{dx} = 0$) в погранслое на основе баланса потока импульса (см. рис.)

Карман записал интегральное ур-е.

$$\rho \int_0^h w_x^2 dy \quad \text{- количество движения в сечении [1,2]}$$

$$\rho \int_0^h w_x dy \quad \text{- массовый расход в сечении [1,2]}$$

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x^2 dy \right) dx \quad \text{- изменение количество движения в сечении [1,2] связано с}$$

1) Преодолением сил трения $-\tau_w dx = P_{\text{трени}}$, где $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial w_y}{\partial x} \right|_{y=0}$ - напряжение поверхностного трения,

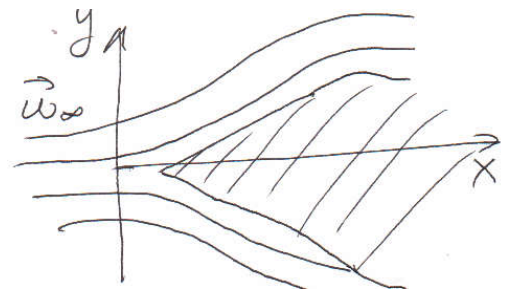
2) потерей массы и, следовательно, импульса через сечение [2,3] - $P_m = \rho w_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx$

Тогда

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x^2 dy \right) dx = w_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx - \frac{\tau_w}{\rho} dx \quad \text{перегруппируем слагаемые и сократим dx предел}$$

интегрирования ограничим $h = \delta$ тогда

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta w_x (w_x - w_\infty) dy \right) = - \frac{\tau_w}{\rho} \quad \text{- интегральное ур-е Кармана для безградиентного течения.}$$



Для градиентного течения ($\frac{dp}{dx} < 0$), например, для обтекания клина, требуется градиент давления,

при этом скорость $w_\infty = w_\infty(x)$ возрастает, и ее нельзя вынести из-под интеграла при оценке потери массы через сечение [2,3].

$$P_m = \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_\infty w_x dy \right) dx - \rho \frac{dw_\infty}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx$$

Дифференциал произведения $\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_\infty w_x dy \right) dx = \rho \frac{dw_\infty}{dx} \cdot \left(\int_0^h w_x dy \right) dx + \rho w_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx$

Искомая величина подчеркнута, $w_\infty = w_\infty(x)$.

Изменение импульса в сечении [1,2] связано с

- 1) Преодолением сил трения - $\tau_w dx = P_{трени}$, τ_w - напряжение поверхностного трения,
- 2) Преодолением сил давления - $\frac{dp}{dx} \cdot dx = [\text{закон Бернулли}] = \rho w_\infty \frac{dw_\infty}{dx} \cdot dx$
- 3) потерей массы через сечение [2,3] - записано выше.

Ур-е Бернулли.

$$\frac{\rho w^2}{2} + \rho gh + p = const$$

После преобразований получим:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta w_x (w_\infty - w_x) dy \right) + \frac{dw_\infty}{dx} \cdot \int_0^\delta (w_\infty - w_x) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$
 - интегральное ур-е Кармана для градиентного

течения.

Решение ур-я Кармана для погранслоя.

Предполагаем кубический профиль скорости в погранслое $w_x = a + by + cy^2 + dy^3$.

- Условие прилипания на поверхности ($w(y=0) = 0$) дает $a = 0$, а также условие равенства нулю второй производной (для удовлетворения уравнения погранслоя (4))

$$\left. \frac{d^2 w_x}{dy^2} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow 2c + 6d\delta = 0 \Rightarrow c = 0$$

- условия гладкой сшивки на $y = \delta$:

$$b + c\delta + d\delta^2 = w_\infty,$$

$$\left. \frac{dw_x}{dy} \right|_{y=\delta} = 0 \Rightarrow b + 2c\delta + 3d\delta^2 = 0.$$

Решаем систему $\begin{cases} b + 3d\delta^2 = 0 \\ b\delta + d\delta^3 = w_\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3d\delta^2 \\ -3d\delta^3 + d\delta^3 = w_\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -\frac{w_\infty}{2\delta^3} \\ b = \frac{3}{2} \frac{w_\infty}{\delta} \end{cases}$

Т.О. $\frac{w_x}{w_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$.

Подставляем профиль в интегральное ур-е Кармана получим

Правая часть ур-я: $\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \nu w_\infty \frac{3}{2} \frac{1}{\delta}$

Левая часть под интегралом: $w_\infty^2 \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - 1 \right] = w_\infty^2 [\dots]$

После интегрирования и приведения слагаемых:

$$\frac{13}{140} \delta d\delta = \frac{\nu}{w_\infty} dx \Rightarrow \frac{13}{140} \int \delta d\delta = \int \frac{\nu}{w_\infty} dx \Rightarrow \frac{13}{140} \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{\nu}{w_\infty} x \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{\frac{280}{13}}}{\sqrt{\frac{x w_\infty}{\nu}}} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}$$

Толщина вытеснения: $\delta^* = 0.375 \cdot \delta$.
 Толщина потери импульса: $\delta^{**} = 0.139 \cdot \delta$

Точное решение Блаузиуса - $\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\text{Re}_x}}$.

п.7. Тепловой пограничный слой

Для определения теплового ПС действуем аналогично случаю гидродинамического ПС.
 Температурное поле в погранслое описывается уравнение теплопроводности (энергии) для движущегося потока

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T.$$

В стационарном случае в декартовых координатах

$$w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

где $\theta = T - T_{wall}$.

Для оценки относительной величины слагаемых обезразмериваем ур-е (7)

Масштабы для обезразмеривания:

$$\begin{cases} w = w_\infty & \text{— невозмущенная скорость} \\ x = l & \text{— расстояние от начала} \\ y = \Delta & \text{— толщина теплового погранслоя} \\ \theta_\infty = \Delta T \equiv T_\infty - T_{wall} & \text{— перепад } T \text{ в системе} \end{cases}$$

Из (7) получим:

$$\frac{\Delta T w_\infty}{l} \tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\Delta T w_\infty}{\Delta} \tilde{w}_y \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\kappa \Delta T}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\kappa \Delta T}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} \quad \times \left[\frac{l^2}{\kappa \Delta T} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow Pe_l \tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{l}{\Delta} Pe_l \tilde{w}_y \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{l^2}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2}$$

Аналогично случаю динамического ПС можно показать, что первые два слагаемых имеют один порядок. Четвертое слагаемое имеет порядок $\sim Pe_l$ [гипотеза $\Delta \sim l / \sqrt{Pe_l} \sim \sqrt{l} \rightarrow \frac{l}{\Delta} \sim \sqrt{Pe_l}$]

Т.о. $w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$ - ур-е энергии для теплового погранслоя. (8)

Ур-е (8) решается совместно с системой уравнений движения для гидродинамического ПС.
 Очевидно, что ур-я (4) и (8) полностью аналогичны для безградиентного течения при $\text{Pr} \equiv \nu / \kappa = 1$
 И приводятся к тождественным уравнениям для безразмерных $\tilde{\theta}$ и \tilde{w}_x .

Т.о. Определенные аналогичным образом значения теплового и гидродинамического погранслоев совпадают при $\text{Pr} = 1$

газы	$\text{Pr} \approx 1$
жидких металлов	$\text{Pr} \ll 1$
Капельные жидкости	$\text{Pr} > 1$
масла	$\text{Pr} \gg 1$

Точные решения уравнений погранслоя громоздкие и \exists в самых простых случаях.
 Приближенные решения (аналогично динамическому погранслою) основаны на интегральных уравнениях энергии для погранслоя.

п.8. Интегральное уравнение энергии для погранслоя

Задача. Вычислить толщину вытеснения используя решение Кармана.

Аналогично динамическому погранслою рассмотрим баланс теплоты в объеме, рис.1

Теплота, вносимая газом через [1,2] - $\rho c_p \int_0^h \theta w_x dy$

$\rho c_p \frac{d}{dx} \left(\int_0^h \theta w_x dy \right) dx$ - изменение количества тепловой энергии в сечении [1,2] на интервале dx связано

с

1) уносом теплоты через сечение [2,3] - $\rho c_p \theta_\infty \frac{d}{dx} \left(\int_0^h w_x dy \right) dx$

2) теплоту, отданную стенкой через грань [1,4] - $\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dx$

Аналогично п.3. баланс тепловой энергии записанный в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\Delta (\theta_\infty - \theta) w_x dy \right) = \kappa \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} - \text{интегральное ур-е энергии погранслоя (Кружилин 1936)}$$

Опр. Толщина потери энергии - толщину гипотетического слоя через который переносится тепло равное по количеству теплоте, переданной от стенки.

$$\delta_T^{**} = - \int_0^\Delta \frac{w_x}{w_\infty} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_\infty} \right) dy$$

Физический смысл следует из интегрального уравнения ПС, записанного в виде

$$c_p \rho \cdot w_\infty \theta_\infty \frac{d}{dx} \delta_T^{**} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Т.е. приращение толщины δ_T^{**} определяется потоком теплоты от стенки.

п.9. Решение интегрального уравнения погранслоя для ламинарного течения

Из уравнения теплового погранслоя \rightarrow при $Pr > 1$, $\delta > \Delta$, $\frac{\Delta}{\delta} \sim 1/\sqrt{Pr}$.

Примем $\delta > \Delta$ для определенности границы интегрирования уравнения погранслоя.

Для профиля T выбираем аналогичный полином 3-й степени $T = a + by + cy^2 + dy^3$

Переходим к безразмерной (относительной) температуре $\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_\infty}{T_{wall} - T_\infty}$ для которой аналогично

получаем

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3. \quad (91)$$

Гидродинамический профиль имеет ту же форму

$$\frac{w_x}{w_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (92)$$

Если (91) и (92) подставить в интегральное ур-е энергии погранслоя проинтегрировать

$$\left(\int_0^{\Delta, \delta} (\theta_\infty - \theta) w_x dy \right) = \theta_\infty w_\infty \delta \left(\frac{3}{20} r^2 - \frac{3}{280} r^4 \right), \quad (93)$$

где введено $r \equiv \Delta / \delta$.

Пренебрегая меньшим слагаемым и подставляя в интегральное ур-е (90) получим

$$\frac{3}{20} \theta_{\infty} w_{\infty} \frac{d}{dx} (r^2 \delta) = \kappa \frac{3 \theta_{\infty}}{2 r \delta}. \quad (94)$$

Дифференцируем и сокращаем множители

$$\frac{1}{10} w_{\infty} \frac{d}{dx} (r^2 \delta) = \frac{\kappa}{r \delta} \rightarrow \frac{w_{\infty}}{10} \left(2r \delta \frac{dr}{dx} + r^2 \frac{d\delta}{dx} \right) = \frac{\kappa}{r \delta} \rightarrow \frac{w_{\infty}}{10} \left(2r^2 \delta^2 \frac{dr}{dx} + r^3 \delta \frac{d\delta}{dx} \right) = \kappa \quad (95)$$

Для гидродинамического погранслоя известно $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{w_{\infty}}} \sqrt{\frac{280}{13}}$. Подставляя это в (95)

$$\text{Получим } r^3 + 4r^2 \frac{dr}{dx} = \frac{13/14}{\nu/\kappa} \approx \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (96)$$

Общее решение ур-я (96) имеет вид

$$r^3 = Cx^{3/4} + \frac{1}{\text{Pr}}. \quad \text{Г.У. } r = \Delta / \delta = 0|_{x=x_0}. \text{ Тогда решение удовлетворяющее Г.У.}$$

$$r = \text{Pr}^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3} \quad \text{или если } x_0=0, \text{ то } r \equiv \frac{\Delta}{\delta} = \text{Pr}^{-1/3}.$$

Подставляя решение для δ получим $\frac{\Delta}{x} = \frac{\delta}{x} \cdot r = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}_x}} \frac{1}{\text{Pr}^{1/3}}$.

п.10. Решение уравнения энергии погранслоя в форме $Nu=f(\text{Re}, \text{Pr})$

Из определения граничных условий 3-го рода $\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha \Delta T \rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{\Delta T} \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}$

Из модельного температурного профиля $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \Delta T \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\Delta} \right) \rightarrow \alpha = \lambda \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta}$.

Подставим решение $\frac{\Delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{1}{\text{Pr}^{1/3}} \rightarrow \alpha = \lambda \frac{2}{3} \frac{1}{x} \frac{\sqrt{\text{Re}}}{4.64} \text{Pr}^{1/3} \rightarrow \left[Nu_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} \right] \rightarrow Nu_x = 0.323 \sqrt{\text{Re}} \text{Pr}^{1/3}$

Точное решение уравнений погранслоя при $\text{Pr} \approx 1$ дает $Nu = 0.332 \sqrt{\text{Re}} \text{Pr}^{1/3}$!!!

Среднее значение Нуссельта по пластине

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &\equiv \frac{1}{l} \int_0^l Nu_x dx = \frac{1}{l} \int_0^l 0.323 \sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{1/3} dx = \frac{0.323 \text{Pr}^{1/3}}{l} \int_0^l \frac{w_{\infty}^{1/2} x^{1/2}}{\nu^{1/2}} dx = \left[\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \right] = \\ &= \frac{0.323 \text{Pr}^{1/3}}{l} \frac{w_{\infty}^{1/2}}{\nu^{1/2}} \frac{2}{3} l^{3/2} = 0.22 \sqrt{\text{Re}} \text{Pr}^{1/3} \end{aligned}$$

По сути, полученные уравнения и есть то, ради чего вводилось понятие погранслоя и вычислялись модельные профили погранслоя!

п.11. Связь теплоотдачи и трения. Тройная аналогия

Опр. Локальный коэффициент гидродинамического трения - отношение

гидродинамического напряжения к гидродинамическому напору. $C_f \equiv \frac{\tau_w(x)}{1/2 \rho w_\infty^2}$

(Известен также коэффициент сопротивления формы $C_f \equiv \frac{F/S}{1/2 \rho w_\infty^2}$, выражаемый через силу, площадь сечения тела и динамический напор.)

Используем модельный профиль скорости (см. п.4.) $\frac{w_x}{w_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$

$$\tau_{wall} \equiv \mu \left. \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu w_\infty \frac{3}{2} \frac{1}{\delta}, \text{ но } \frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \tau_{wall} = \mu w_\infty \frac{3}{2} \frac{\sqrt{Re_x}}{4.64x}$$

$$\text{Тогда можно выразить } C_f: C_f \equiv \frac{\tau_w}{1/2 \rho w_\infty^2} = 0.646 \frac{\mu w_\infty}{\rho w_\infty^2 x} \sqrt{Re_x} \rightarrow C_f = \frac{0.646}{\sqrt{Re_x}}$$

Т.о. коэффициент гидродинамического трения подобен $\delta/x = 4.64/\sqrt{Re_x}$.

Связь теплоотдачи и трения задается числом Стэнтона

$$St \equiv \frac{\alpha}{c \rho w_\infty} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \left[Nu = 0.323 Re^{1/2} Pr^{1/3} \right] = \frac{0.323}{\sqrt{Re_x} Pr^{2/3}}$$

$$St = \frac{C_f}{2 Pr^{2/3}}, \text{ учитывая } \left[St \equiv \frac{Nu_x}{Re_x Pr} \right] \rightarrow C_f = \frac{2 Nu}{Re \cdot Pr^{1/3}}$$

$$\text{Если } Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} = 1, \rightarrow St = C_f / 2, C_f = \frac{2 Nu}{Re}$$

Тройная аналогия

Уравнения погранслоя для переноса количества движения, тепла и массы диффузией

тождественны при условии $Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} = Le \equiv \frac{\kappa}{D} = Pr_{diff} = Sc \equiv \frac{\nu}{D} = 1$.

В этом случае модельные профили аналогичны и погранслои совпадают.

Это позволяет говорить о *тройной аналогии* задач теплообмена, массообмена и сопротивления.

Это также причина того, что при увеличении теплоотдачи в теплообменнике одновременно увеличивается и гидродинамическое сопротивление.

п.12. Полуэмпирические формулы теплоотдачи

Источники:

Теория теплообмена А.И.Леонтьев; *Конвективный перенос в теплообменниках* А.А.Жукаускас; *Справочник по теплопередаче* С.С.Кутателадзе и др.

Ест. Конвекция, большой объем верт. пластина,	$Nu_x = 0.359 Gr_x^{1/4}$	Переход в турбулентный режим при $Ra \equiv Pr Gr > 0.7 \cdot 10^9$
наклонная пластина в воздухе	$\bar{Nu} = 0.48 \frac{1 + \cos \varphi}{2} Gr^{1/4}$	
-//- в воздушно-капельной среде	$\bar{Nu} = 0.067 [Gr \cdot Pr^{1.29}]^{1/3}$	
Горизонтальная квадратная пластина	$\bar{Nu} = 0.14 Ra_l^{1/3}$	Справедлива для ламинарного и турбулентного режимов

Длинный горизонтальный цилиндр	$Nu_x = 0.604Gr^{1/4}(x/d)^{1/4}$ $\bar{Nu} = 0.14Gr^{1/4}$	Теоретическое решение Германа. d- диаметр, x – координата от точки «застоя»
Пластина, ограниченный объем горизонтальный слой	$\bar{Nu} = 0.24Ra^{1/4}$ $\bar{Nu} = 0.1Gr^{0.31} Pr^{0.36}$	- малые число Ra - $Ra > 3 \cdot 10^4$. Признаки турбулентности и 3D течения
Огр. Объем, вертикальный слой высотой h, толщиной δ	$\bar{Nu} = 0.119Gr^{0.3}(h/\delta)^{-0.1}$	Например стеклопакет Ламинарный режим
-//- для капельной жидкости	$\bar{Nu} = 0.28Ra^{1/4}(h/\delta)^{-1/4}$	Ламинарный режим
-//- турбулентный режим	$\bar{Nu} = 0.046Ra^{1/3}$	$Ra \equiv Pr Gr > 10^9$