

Тема 28. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

- п.1. Природа излучения газов и твердых тел
- п.2. Понятия и определения теор. переноса излучения
- п.3. Излучение абсолютно четного тела
- п.4. Закон излучения Киргофа
- п.5. Виды критериев подобия

- п.6. Теплообмен между серыми стенками с экраном
- п.7. Теплообмен между полостью и вложенным телом
- п.8. Тепл-мен между произвольными поверхностями
- п.9. Ур-е переноса излучения в поглощи излуч средах
- п.10. Упрощенные методы решения УП

п.1. Природа излучения газов и твердых тел

Излучение *газов* имеет сложную линейчатую структуру. Каждая линия соответствует переходу молекулы из одного колебательно- вращательного состояния в другое $\{n_1, j_1\} \rightarrow \{n_2, j_2\}$,

(здесь n_i, j_k – колебательное и вращательное квантовые числа). Линии объединены в т.н. полосы излучения, рис.1,2.

Каждой колебательной степени свободы соответствует основная полоса - $n_2 - n_1 \equiv \Delta n = 1$ и существенно менее интенсивные обертоны $\Delta n = 2, \Delta n = 3$ и т.д. Поэтому для многоатомных молекул полос много.

Аналогичными переходами обусловлено поглощение. Поскольку переходы возможны не между всеми состояниями, а только т.н. «разрешенные» переходы (разрешены переходы $\Delta j = \pm 1$), то образуется упорядоченный линейчатый спектр поглощения и излучения. Линии - полосы молекулярного излучения.

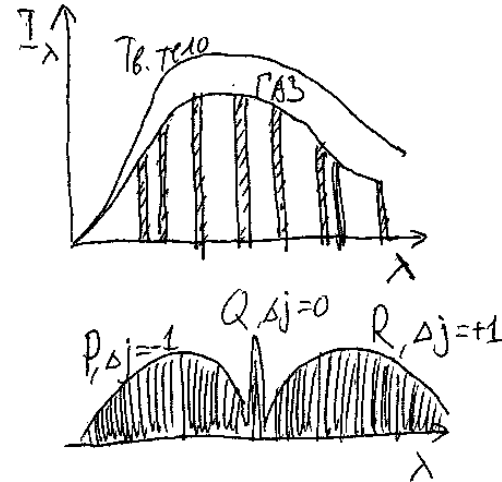


Таблица. Основные полосы атмосферных газов в видимом (0.4 – 0.78 мкм) и ИК диапазонах

H2O	0.59, 0.69, 0.72, 0.81, 0.94, 1.1, 1.38, 1.87, 2.47, 2.66, 3.17 и 6,25 мкм $\lambda > 8$ мкм – вращательные полосы
CO2	1.4, 1.6, 2.05, 4.3, 4.8, 5.2, 10.4 и 12,8— 17,3 с центром на 13,9 мкм. 2.65-2.80; 4.15-4.45; 13-17 мкм
CO	2.35, 4.67 мкм
NO	2.7, 5.3 мкм
O3	4.7, 9.6 мкм

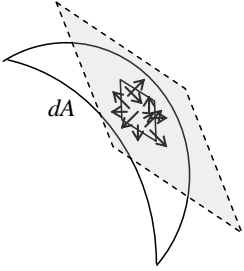
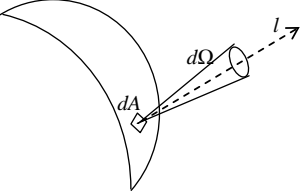
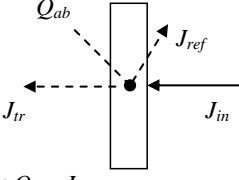
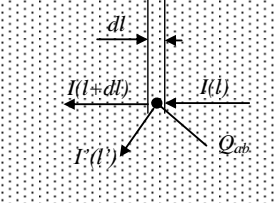
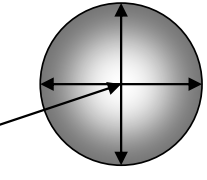
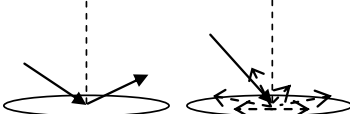
Частота в системе Си f – [Гц], несистемные единицы для длины волны λ – [мкм], для частоты частота ν – [1/см] ($\nu = f / c_0$, где c_0 - скорость света в [см/сек]).

В *твердых телах* теоретически излучение и поглощение происходит при изменении квантового состояния тела (электронов и атомов). Однако ввиду огромной плотности этих квантовых состояний поглощаться могут любые кванты, - поэтому спектр носит *непрерывный характер*.

п.2. Понятия и определения теории переноса излучения

Таблица.1. Понятия теории переноса излучения

Иллюстрация	Определение	Значения, отношения
	<p>Лучистая энергия, U_{rad} - энергия фотонов (квантов эл.магн. излучения) или электромагнитного поля в системе, Дж</p> <p>Плотность лучистой энергии, $u_{rad} = dU_{rad} / dV$ - энергия фотонов в единице объема в пределе физически малого объема, Дж/м³</p>	<p>$U_{rad} = N \cdot h\nu$</p> <p>$u_{rad} = \frac{1}{c} \int I(r, l) d\Omega$</p> <p>$P_{rad} = u_{rad} / 3$ - давление</p>

	<p>Поток излучения (лучистый поток), Φ – энергия переносимая фотонами через поверхность в единицу времени, Вт Плотность потока излучения, $J = d\Phi / dA$, Вт/м² Плотность потока падающего J_{in} (испущенного J_{em}) излучения – плотность потока в полусферу к (от) поверхности. Плотность результирующего потока, J_{res} – разность испущенного и падающего излучения на площадку</p>	$\Phi_\lambda = \frac{U_{rad,\lambda}}{d\lambda dt}$ $J_\lambda = \frac{dU_{rad,\lambda}}{dAd\lambda dt}$ $J_{res} = J_{in} - J_{em}$
	<p>Интенсивность излучения (устар. сила излучения, яркость), $I(\vec{l}) = dJ / d\Omega$ – плотность потока в единице телесного угла в направлении \vec{l}, перпендикулярно единичной площадке. Эпюра интенсивности излучения – функция $I(\vec{l})$ от направления \vec{l}. – индикатриса излучения</p>	$I = \frac{dU_{rad}}{dAd\Omega dt}$ $I_\lambda = \frac{dU_{rad,\lambda}}{dAd\Omega d\lambda dt}$ $I(\vec{r}, \vec{l}) = \int_0^\infty I(\vec{r}, \vec{l}) d\lambda$
<p>Спектральные величины – величины (интенсивность, поток, энергия) отнесенные к единичному спектральному интервалу и приобретающие соответствующую размерность.</p>		$I_\lambda = dI / d\lambda,$ $\Phi_\lambda = d\Phi_\lambda / d\lambda,$ $J_\lambda = dJ / d\lambda$
 <p>$J_{tr} + J_{ref} + Q_{ab} = J_{in}$</p>	<p>Относительные (безразмерные) коэффициенты поглощения α, отражения β, пропускания τ слоя вещества. Те же спектральные коэффициенты – относятся к узкому спектральному диапазону.</p>	$J_{ref} = \beta \cdot J_{in}$ $J_{tr} = \tau \cdot J_{in}$ $Q_{ab} = \alpha \cdot J_{in}$ $\alpha + \beta + \tau = 1$
	<p>Объемный коэффициент (показатель) поглощения среды α – коэффициент характеризующий ослабление интенсивности излучения в среде за счет поглощения на некотором малом оптическом пути, [1/м]. Коэффициент рассеивания среды β – коэффициент, характеризующий ослабление интенсивности излучения за счет рассеяния, [1/м]. Коэффициент ослабления (адстинкции) $(\alpha + \beta)$ – характеризует ослабление за счет обоих факторов.</p>	$I = I_0 e^{-\alpha \cdot x}$ $I_\lambda = I_{0,\lambda} e^{-\alpha_\lambda x}$ $I_\lambda = I_{0,\lambda} e^{-(\alpha_\lambda + \beta_\lambda)x}$
	<p>Изотропная индикатриса излучения $I(\vec{r}, \vec{l}) = I(\vec{r})$ Изотропное поглощение - $\alpha_\lambda(\vec{r}, \vec{l}) = \alpha_\lambda(\vec{r})$ Изотропное рассеяния - $\beta_\lambda(\vec{r}, \vec{l}) = \beta_\lambda(\vec{r})$, $p(\theta) = 1$ Индикатриса рассеяния $p(\theta)$ – вероятность рассеяния в телесный угол $d\Omega$ под углом к θ вектору падения</p>	$P = p(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi}$ – вероятность рассеяния в $d\Omega$
	<p>Зеркальное отражение. Диффузное отражение.</p> 	

Связь плотности лучистой энергии и интенсивности излучения.

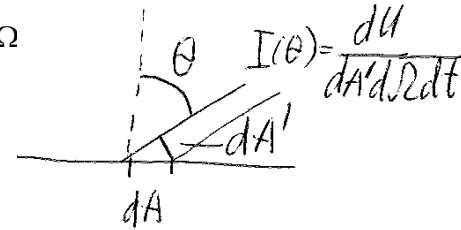
$$u_{rad} \equiv \frac{\Delta U_{rad}}{dV} = \left[\begin{array}{l} \Delta U_{rad} = \int_{4\pi} dU_{rad} \\ dV = c dt dA \end{array} \right] = \frac{\int_{4\pi} dU_{rad}}{c dt dA} = \left[dU_{rad} = I \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \right] = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I \cdot d\Omega$$

Для изотропного излучения, например, излучения абсолютно черного тела $\rightarrow u_{rad} = \frac{4\pi}{c} I_0$,

где I_0 - интенсивность излучения «черного» тела (изотропного).

Связь плотности потока излучения и интенсивности излучения, пояснение, рис.4

$$J = \left[\begin{array}{l} dU_{rad} = I \cdot dA \cdot d\Omega \cdot dt \\ dU_{rad} = J \cdot dA' \cdot dt \end{array} \right] = \int_{4\pi} I \cdot \frac{dA'}{dA} d\Omega = [dA' = dA \cdot \cos \theta] = \int_{4\pi} I \cdot \cos \theta \cdot d\Omega$$



Соответственно, для падающего/излучаемого потока излучения

$$J_{in} = \int_{2\pi} I \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \rightarrow \text{для АЧТ } J_0 = \pi \cdot I_0$$

Давление излучения как газа квантов (термодинамика) выражается через плотность лучистой энергии. $u_{rad} = n_0 m_0 w^2$, $p_{rad} = \frac{1}{3} n_0 m_0 w^2 \rightarrow p_{rad} = \frac{1}{3} u_{rad}$.

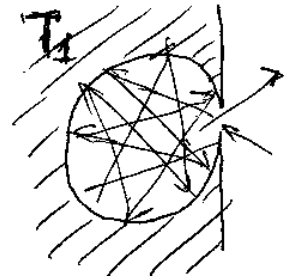
Где n_0 - плотность [шт/м³], m_0 - масса частицы, w - скорость частиц.

То же дает и более строгий термодинамический расчет.

п.3. Излучение абсолютно черного тела

Опр. Тело, поглощающее все падающее на него излучение называется АЧТ

АЧТ – это модель для описания излучения твердых тел и оптически плотных сред, которая была сформирована во второй половине 19 в. в работах Йозефа Стефана (эксперимент) Людвиг Больцмана (теория) и других ученых, в связи с вопросами: Какую энергию излучают тела, от чего зависит эта энергия, как она зависит от длины волны, от температуры, от угла к поверхности, как ее измерять и т.д. Геометрическое пояснение к модели, рис. 3.



Основные количественные законы излучения АЧТ:

Закон Стефана $J_{АЧТ} = \sigma T^4$ [Дж/(с·м²)] (эксперимент, 1879)

Закон Больцмана $J_{АЧТ} = \sigma T^4$ (теория, 1884)

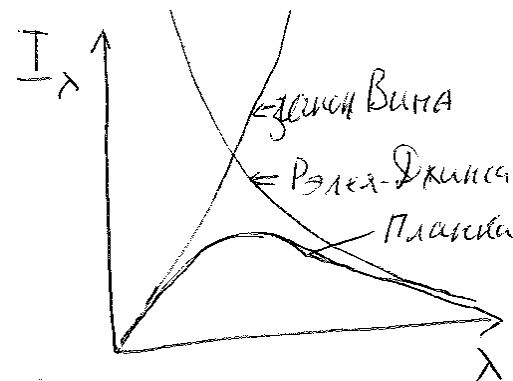
$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ [Дж/(с·м²·К⁴)] – постоянная Стефана - Больцмана.

Плотность излучения по закону Вина (1893):

$$u(\nu, T)_{вина} = c_1 \nu^3 \exp\left(-c_2 \frac{\nu}{T}\right)$$

Плотность излучения Релея- Джинса :

$$u(\nu, T)_{Релей-Джинс} = kT \frac{w^2}{\pi^2 c^3}$$



Формула спектральной плотности потока излучения АЧТ

Планка, полученная на основе квантовых представлений о свете (1900)

$$J_0(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} - \text{плотность потока излучения, [Дж с}^{-1} \text{ м}^{-2} \text{ Гц}^{-1}]$$

ν - частота [Гц].

$$J_0(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp(c_2 / \lambda T) - 1}, - \text{плотность потока излучения, [Дж с}^{-1} \text{ м}^{-2} \text{ м}^{-1}]$$

$c_1 = 3,74 \cdot 10^{-16}$ [Вт/м²], $c_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$ [м·К] – постоянные, выражаемые через мировые константы.

$$\text{Закон смещения Вина } \lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{T}$$

(эксперимент Вильгельм Вин, 1893)

На основе понятия АЧТ сформулировано понятие серое тело.

Опр. Серое тело - Тело поглощающее часть $0 < \delta < 1$ падающего излучения независимо от спектрального диапазона.

Серое тело - также модель для описания излучения различных тел.

$$J_{\text{сер}} = \varepsilon J_0 \rightarrow J_{\text{сер}} = \varepsilon \sigma T^4, \text{ где } \varepsilon - \text{степень черноты серого тела.}$$

п.4. Закон излучения Киргофа

Формулировка. Отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности одинаково для всех тел, и зависит только от температуры

Излучательная способность – коэффициент испускания или плотность потока излучения поверхности, **поглощательная способность** – коэффициент поглощения или поглощенный поток излучения.

$$\text{Поскольку закон относится также и к АЧТ, то } const = \frac{J_{\text{изл}}}{\delta_{\text{погл}}} = \frac{\sigma T^4}{1} = \sigma T^4 \rightarrow J_{\text{изл}} = \delta_{\text{погл}} \sigma T^4$$

$$\text{Для серого тела - } const = \frac{\alpha_{\text{изл}} \sigma T^4}{\delta_{\text{сер}}} = \sigma T^4 \rightarrow \alpha_{\text{изл}} = \delta_{\text{сер}} = \varepsilon \text{ Назовем величину } \varepsilon, \text{ одновременно}$$

характеризующую и излучательную, и поглощательную способность тела **степенью черноты**.

Понятно, что степень черноты также равна отношению потока излучения произвольного тела к потоку излучения АЧТ $\varepsilon = \Phi_{\text{тела}} / \Phi_{\text{АЧТ}}$.

По сути это означает что «степень черноты поверхности» и коэффициент поглощения поверхности - это тождественные величины при одной температуре причем как в интегральном значении, так и по для любого участка спектра.

Можно рассматривать **спектральную** (относящуюся к участку длин волн) и степени черноты, различающиеся в общем случае. Для **серого тела по определению интегральную**

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon.$$

п.5. Теплообмен между черными и серыми стенками. Приведенная степень черноты

Поскольку стенки АЧТ поглощают всю падающую лучистую энергию, то теплообмен между черными стенками (бесконечными) определяется разностью испущенных потоков

Задание. Спектральный закон Планка формально связан с формулой Стефана-Больцмана. Каким образом? Запишите.

Задание. Проверить константы c_1 и c_2 исходя из полной записи функции

$$J_0(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{\exp(hc / \lambda kT) - 1}$$

Задание. Записать функцию **плотности потока** излучения черного тела и **плотности энергии** излучения если функция интенсивности планковской (АЧТ) радиации

$$J_{2,рез} = J_1 - J_2 = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad \text{-(это для единицы площади).}$$

В случае серых стенок часть падающего потока отражается, поэтому строится более сложный баланс.

$$\begin{cases} J_{1,\rightarrow\phi\phi} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) J_{2,\rightarrow\phi\phi} & \text{- все исходящее от стенки 1} \\ J_{2,\rightarrow\phi\phi} = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) J_{1,\rightarrow\phi\phi} & \text{- все исходящее от стенки 2} \end{cases}$$

Имеем два ур-я и две неизвестных. Подставляем $J_{2,\rightarrow\phi\phi}$ в выражение для $J_{1,\rightarrow\phi\phi}$:

$$J_{\rightarrow\phi\phi,1} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) [\varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) J_{\rightarrow\phi\phi,1}] \rightarrow$$

$$J_{\rightarrow\phi\phi,1} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) J_{\rightarrow\phi\phi,1} \rightarrow$$

$$J_{\rightarrow\phi\phi,1} [1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)] = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \rightarrow$$

$$J_{\rightarrow\phi\phi,1} = \frac{\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} = \frac{\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Аналогично

$$J_{2,\rightarrow\phi\phi} = \frac{\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_1^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Тогда

$$J_{2,рез} = J_1 - J_2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \rightarrow J_1 - J_2 = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_2 + 1/\varepsilon_1 - 1} = \varepsilon_{прив} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Где определено понятие *приведенная степень черноты* $\varepsilon_{прив} \equiv \frac{1}{1/\varepsilon_2 + 1/\varepsilon_1 - 1}$ или $\varepsilon_{прив} \equiv \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$

п.6. Теплообмен между серыми стенками при наличии экрана

Опр. Экран – тонкая непрозрачная перегородка между излучающими и поглощающими стенками, как правило, с высокой теплопроводностью и низкой степенью черноты ε_3 служащий для уменьшения теплопередачи.

Согласно ранее полученному уравнению без экрана

$$(J_1 - J_2)_{\text{без экрана}} = \varepsilon_{прив} \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (11)$$

При наличии экрана

$$J_1 - J_3 = \varepsilon_{прив,1-3} \sigma (T_1^4 - T_3^4) \quad (12)$$

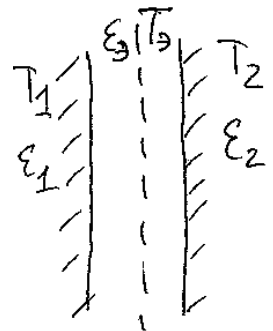
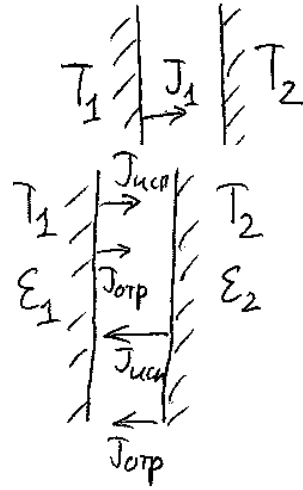
$$J_3 - J_2 = \varepsilon_{прив,2-3} \sigma (T_3^4 - T_2^4) \quad (13)$$

В равновесии температуры не меняются и потоки равны $J_1 - J_3 = J_3 - J_2 \rightarrow$ В случае, когда степени черноты всех поверхностей равны (или приведенные степени черноты равны)

$$\sigma T_1^4 - \sigma T_3^4 = \sigma T_3^4 - \sigma T_2^4 \rightarrow \sigma T_1^4 + \sigma T_2^4 = 2\sigma T_3^4 \rightarrow \sigma T_3^4 = \frac{1}{2} [\sigma T_1^4 + \sigma T_2^4] \rightarrow$$

$$J_1 - J_3 = \varepsilon_{прив} \sigma (T_1^4 - \frac{1}{2} T_1^4 - \frac{1}{2} T_2^4) \rightarrow J_1 - J_3 = \frac{\varepsilon_{прив} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{2}$$

Учитывая (11) видим, что суммарный поток уменьшается в 2 раза.



Аналогично показывается, что наличие 2-х экранов снижает поток в 3 раза, наличие 3-х экранов, - в 4 раза и т.д.

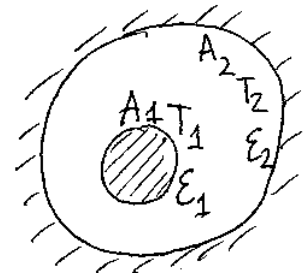
Если степень черноты экрана существенно меньше черноты стенок $\varepsilon_{\text{э}} \ll \varepsilon_{\text{ст}}$, то

$$(J_1 - J_{\text{э}})_{\text{экран}} = 0.5 \frac{\varepsilon_{\text{np}}^*}{\varepsilon_{\text{np}}} (J_1 - J_2)_{\text{безэкрана}}$$

Где $\varepsilon_{\text{np}}^*$ - приведенная степень черноты поверхность- экран, ε_{np} - поверхность- поверхность.

п.7. Теплообмен между полостью и вложенным в нее выпуклым телом

Схема системы представлена на рисунке. Пусть φ - часть излучения полости, падающая на поверхность вложенного тела; $(1 - \varphi)$ - часть излучения полости, не попадающее на вложенное тело..



Можно показать (существует теорема), что $\varphi = \frac{A_1}{A_2}$ выражается через

площадь поверхностей A_1 и A_2 .

Тогда
$$\begin{cases} J_{\text{эфф},1} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) \varphi J_{\text{эфф},2} \\ J_{\text{эфф},2} = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) J_{\text{эфф},1} + (1 - \varphi)(1 - \varepsilon_2) J_{\text{эфф},2} \end{cases} \rightarrow$$

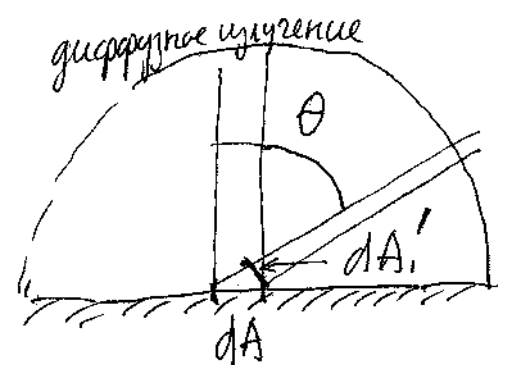
$$Q_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \cdot A_1$$

- общий лучистый поток от тела 1 к поверхности 2.

п.8. Теплообмен между произвольными поверхностями

п.8.1. Закон излучения Ламберта

Закон Ламберта (закон косинусов Ламберта) – устанавливает зависимость **потока излучения участка поверхности в направлении $J_{\text{emit}}(\theta)$** (заметим, это новое понятие- не плотность потока излучения J) от направления относительно нормали к площадке, т.е. угла θ . $J_{\text{emit}}(\theta) = J_n \cos(\theta)$



Закон косинусов естественным образом следует из изотропности (диффузности) излучения $I(\theta, \varphi) = \text{const}$.

По сути он связан с очевидным фактом, что площадка видна под меньшим углом и, следовательно, шлет меньше энергии в направлении, задаваемом углом θ .

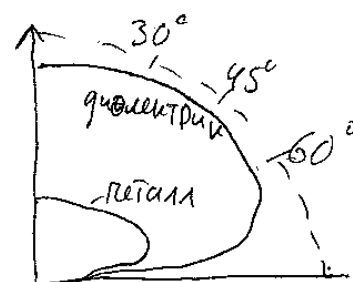
Запишем поток в заданном направлении через интенсивность в этом направлении. (Интенсивность определяется энергией, проходящей через площадку перпендикулярно направлению потока)

$$J_{\text{emit}}(\theta) = Id\Omega dA' = [dA' = dA \cos(\theta)] = Id\Omega dA \cos(\theta).$$

Для нормального направления $J_{\text{emit}}(\theta = 0) = Id\Omega dA = J_n \rightarrow$

можем записать $J_{\text{emit}}(\theta) = J_{\text{emit},0} \cos(\theta)$

(1)



Закон не действует для не изотропных индикатрисс, например для излучения полированного металла.

Основываясь на законе Ламберта определим связь между полусферическим потоком и интенсивностью нормального к площадке излучения.

$$\sigma T^4 dA = \int_{2\pi} I(\theta) d\Omega = I_n \int_{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \left[\int_{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \pi \right] = \pi I_n \rightarrow I_n = \frac{\sigma T^4 dA}{\pi} \quad (2)$$

п.8.2. Теплообмен излучение между произвольными поверхностями

Найдем поток излучения от произвольного участка dA_1 к произвольному участку dA_2

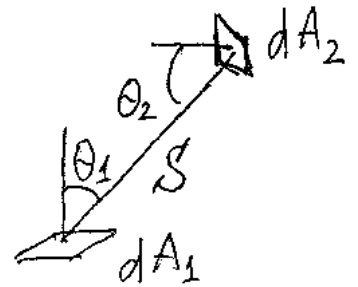
Учитывая закон Ламберта и выражение (2) имеем

Участок dA_2 получает от dA_1 поток

$$\delta\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\varepsilon \sigma T_1^4 dA_1}{\pi} \cdot \cos \theta_1 d\Omega_1,$$

Где $d\Omega_1$ - телесный угол под которым от dA_1 виден участок dA_2 .

$$d\Omega_1 = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{S^2} \rightarrow \delta\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\varepsilon \sigma T_1^4}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{S^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2$$



Угловой коэффициент элемента dA_1 относительно dA_2 $\varphi_{dA1-dA2}$ определим как поток излучения от dA_1 к dA_2 , деленный на полный (полусферический) поток излучения участка dA_1 - $\varepsilon \sigma T_1^4 dA_1$

$$\varphi_{dA1-dA2} = \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\pi \cdot r^2} dA_2, \quad (12)$$

Как видно, угловой коэффициент определяется только геометрическими параметрами (нет черноты, температур и т.п.)

Запишем поток от dA_1 к dA_2 (с учетом определения углового коэффициента)

$$\delta\Phi_{1 \rightarrow 2} = \varepsilon \sigma T_1^4 \cdot \varphi_{dA1-dA2} \cdot dA_1. \quad (13)$$

Аналогично выражается и поток от dA_2 к dA_1 .

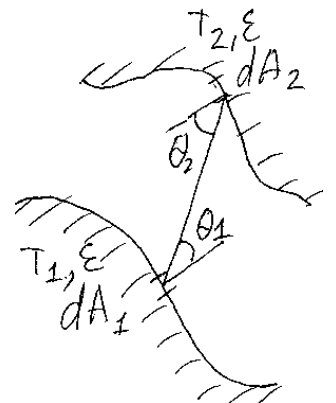
$$\delta\Phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\varepsilon \sigma T_2^4}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{S^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \text{ или } \delta\Phi_{2 \rightarrow 1} = \varepsilon \sigma T_2^4 \cdot \varphi_{dA2-dA1} \cdot dA_2$$

Поэтому

$$\delta\Phi_{1 \rightarrow 2} - \delta\Phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{\varepsilon \sigma}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{S^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 (T_1^4 - T_2^4) \quad (14)$$

Для определения теплообмена между произвольными поверхностями производим интегрирование по dA_1 и dA_2 :

$$\Phi = \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \underbrace{\int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\pi \cdot r^2} dA_2}_{(15)} dA_1$$



Определим угловой коэффициент излучения поверхности A_1 на поверхность A_2 и перепишем (15)

$$\Phi = \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \underbrace{\int_{A_1} dA_1 \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\pi \cdot r^2} dA_2}_{\text{угловой коэффициент } \varphi_{A_1-A_2}} \cdot A_1 = \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \varphi_{A_1-A_2} A_1$$

Вопрос. Как должна быть изменена степень черноты ε () если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$?
Изменится ли поток если поменять местами ε_1 и ε_2 ?

Угловые коэффициенты для заданной конфигурации тел могут быть рассчитаны путем интегрирования (15) или берутся из справочников.

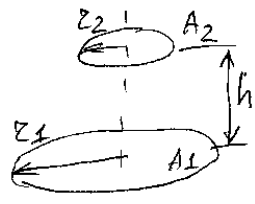
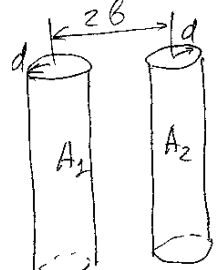
Для диффузных и равномерно излучающих тел угловой коэффициент зависит только от геометрии системы (одинаковы для подобных систем).

Очевидно свойство взаимности угловых коэффициентов (поскольку от перемены порядка интегрирования интеграл в (15) не меняется)

$$\varphi_{A_1-A_2} \cdot A_1 = \varphi_{A_2-A_1} \cdot A_2 \tag{16}$$

В справочниках приводятся угловые коэффициенты для элементов поверхностей, для элемента и поверхности конечных размеров, а также для систем тел конечных размеров

Таблица. Примеры угловых коэффициентов.

<p>Две параллельные круговые площадки</p>		$\varphi_{A_1-A_2} = \frac{1}{2} \left[X - \sqrt{X^2 - 4 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2} \right],$ <p>где $R_1 = r_1/h, R_2 = r_2/h, X = 1 + \frac{1+R_2^2}{R_1^2}$.</p>
<p>Два параллельных неограниченных цилиндра</p>		$\varphi_{A_1-A_2} = \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{B^2 - 1} + \cos \text{ec}(1/B) - B \right],$ <p>где $B = b/d$.</p> <div data-bbox="1141 1243 1540 1377" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><i>Задание.</i> Рассчитать лучистый поток от трубы к параллельной трубе. $\varepsilon=0.8, T_1=500 \text{ C}, T_2=250 \text{ C}, b=5, d=4$.</p> </div>

п.9. Уравнение переноса излучения в реальных поглощающих и рассеивающих средах

Основное развитие теория переноса излучения в реальных средах получила ввиду решения задач переноса в атмосфере солнца, атмосфере земли, переноса нейтронов в задачах атомных реакций и т.д. Применение для энергетических печей, систем теплообмена, задач лазерной локации и других. Важные имена Милн (точные решения переноса для плоских систем), Чандрасекхар (методы решения в том числе для астрофизических задач), Шварцшильд, Росселанд и др.

Уравнение переноса излучения в реальной среде формулируется для интенсивности излучения (интегральной или спектральной, в общем случае спектральной интенсивности)

$$\frac{dI_\nu}{dr} = -\alpha_\nu I_\nu + J_\nu, \tag{17}$$

Где α_ν - коэффициент поглощения, J_ν - интенсивность испускания излучения. Согласно закону Киргофа интенсивность испускания (в случае локального термодинамического равновесия)

$$J_v = \alpha_v I_{p,v},$$

где $I_{p,v}$ - интенсивность излучения черного тела (функция Планка), тогда

$$\frac{dI_v}{dr} = -\alpha_v I_v + \alpha_v I_{p,v}. \quad (18)$$

В случае рассеивающей среды

Опр. Изотропное рассеяние – случай когда индикатриса рассеяния – сферическая, рассеяние в любом направлении равновероятно – $p(\theta', \varphi') = 1$.

Распространенный тип рассеяния на частицах малых по сравнению с длиной волны излучения – Рэлеевское рассеяние, - индикатрисса $p(\gamma) = \frac{3}{4}(1 - \cos^2 \gamma)$.

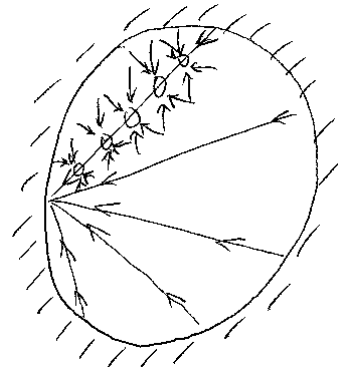
$$\frac{dI_v}{dr} = -\alpha_v I_v + \kappa_v I_{p,v} + \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi p(\theta, \varphi, \theta', \varphi') I_v(\vec{r}, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta', \quad (19)$$

Где σ_v - коэффициент рассеяния. Заметим, что α_v в (***) является коэффициентом ослабления и включает «истинное» поглощение κ_v и рассеяние $\alpha_v = \kappa_v + \sigma_v$.

Третье слагаемое - функция источников в случае рассеивающей среды. Она соответствует «сканированию» излучения приходящего со всех сторон и выделению из него той части, которая рассеивается в рассматриваемом нами направлении переноса.

В случае изотропного рассеяния

$$\frac{dI_v}{dr} = -\alpha_v I_v + \kappa_v I_{p,v} + \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi I_v(\vec{r}, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta'. \quad (20)$$



Численное решение уравнения переноса решается методом характеристик при котором для определения потока излучения на границе рассчитывается изменение интенсивности вдоль множества направлений – характеристик. Для расчета рассеяния в каждой точке траектории рассчитываются интенсивности излучения по своим характеристикам. В результате объем расчетов - очень велик, а при подробном рассмотрении спектра - колоссальный.

п.10. Упрощенные методы решения уравнения переноса

Как правило, основная интересующая исследователей величина – поток излучения на границе или результирующий поток на границе.

Для *самых простых геометрий* (прежде всего плоский слой) и простейшего рассеяния имеются аналитические приближенные решения.

Предельные случаи:

- 1) *оптически тонкая* (прозрачная) среда $l_{кв} \gg L_{сист}$ (приближение Планка). В этом случае \forall

точка среды испускает излучение пропорциональное $\Phi = S_{сила\ полосы\ газа} \cdot I_p$, где

$$S_{сила\ полосы\ газа} = \int_0^\infty \alpha_\lambda d\lambda - \text{«сила полос» всех излучающих газов. Стенки взаимодействуют друг с}$$

другом без участия газа (как в случае отсутствия газовой среды).

- 2) *Оптически плотная* среда $l_{кв} \ll L_{сист}$ (приближение Росселанда). В этом случае стенки «не видят» друг друга. Поток на стенки определяется температурным и концентрационным полем газов. Действует удобная модель «диффузии» излучения.

3) Случай *средней оптической плотности* $I_{\kappa\sigma} \sim L_{\text{сист}}$. В этом случае используют решение ур-я переноса (18) для собственного излучения слоя газа:

$$I_{\lambda} = I_{p,\lambda}(1 - e^{-\alpha_{\lambda}x}), \quad (21)$$

где x – длина вдоль луча.

Задача. Получить решение ур-я (*) для излучения вдоль луча при $I(0)=0$. (Собственное излучение слоя).

Или используют формулы для излучения *эффективного объема* (*эффективной длины* пути луча), или используют *дифференциальное приближение* для лучистого теплообмена.

Поверхностная плотность потока излучения от полусферического (радиус R) объема изотермического газа на элементарную может быть записана аналогично (21)

$$\delta\Phi_{\lambda} = (1 - e^{-\alpha_{\lambda}R})J_{p,\lambda}d\lambda \quad (22)$$

$J_{p,\lambda}$ – спектральная плотность потока черного тела. Величину $\varepsilon_{\lambda} = (1 - e^{-\alpha_{\lambda}R})$ называют *спектральной степенью черноты объема газа*, которая в общем случае зависит от температуры, давления, длины волны и радиуса – $\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon(\alpha\{T, p, \lambda\}, R)$.

Исходя из вида решения (22) предполагают, что спектральный поток излучения некоторого объема газа на стенку может быть приближенно записано в виде

$$\delta\Phi_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}(\alpha, L_{\text{eff}})J_{p,\lambda}d\lambda,$$

Где введено понятие *средняя (эффективная) длина* пути луча L_{eff} –

Опр. *Средняя (эффективная) длина пути луча* L_{eff} – длина пути луча, которая соответствует радиусу полусферы, поток излучения от которой рассчитанный по (22) дал бы точное значение потока

В литературе имеются различные формулы определения *эффективной длины* пути для различных систем (объемов)

Примеры формул для определения L_{eff} для нахождения среднего потока излучения объема газа на стенку системы.

Оптически тонкий объем газа	$L_{\text{eff}} = 4V / A$, где V – весь объем, A – вся площадь стенки
сфера	$L_{\text{eff}} = 2D / 3$
бесконечный цилиндр	$L_{\text{eff}} = D$
Средняя оптическая толщина	$L_{\text{eff}} \cong 0.9(4V / A)$

При переходе от спектрального потока к интегральному запишем

$$\delta\Phi = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha_{\lambda}L_{\text{eff}}})J_{p,\lambda}d\lambda,$$

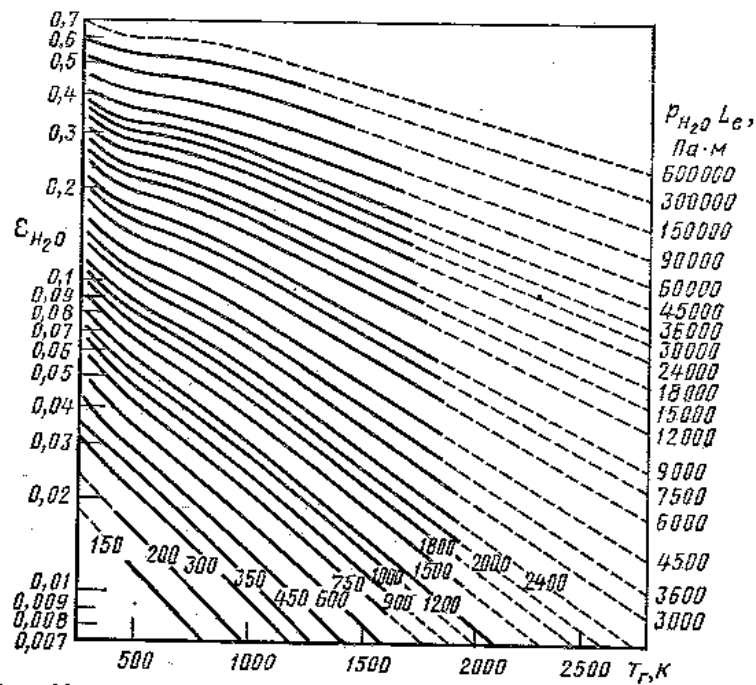
Предполагается, что L_{eff} не зависит от коэффициента поглощения (или длины волны λ) и определяется геометрией системы (на основании закономерностей указанных выше в таблице). Тогда интегральный поток представим в виде

$$\delta\Phi = \varepsilon_I \sigma T^4, \quad \text{где } \varepsilon_I = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha_{\lambda}L_{\text{eff}}})J_{p,\lambda}d\lambda / (\sigma T^4). \quad (23)$$

Сама интегральная степень черноты для различных систем находится экспериментально либо путем громоздких расчетов и приводится в виде номограмм, таблиц, полуэмпирических формул и т.д. Номограммы степени черноты для основных топочных газов – CO_2 , H_2O приводятся по отдельности.

Порядок расчета эффективной степени черноты смеси газов в системе (например, топке котла)

- 1) Для заданной геометрии системы оценивают L_{eff} .
- 2) Зная парциальные давления отдельных газов находят оптическую толщину для каждого компонента $p_{CO_2} L_{eff} \cdot p_{H_2O} L_{eff}$ [Па.м];
- 3) По номограмме определяют степень черноты объема для каждого газа;
- 4) По номограммам находят поправку на перекрытие полос $\Delta \varepsilon_{\text{перекрытие}}$
- 5) Полную степень черноты находят $\varepsilon_1 = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} + \Delta \varepsilon_{\text{перекрытие}}$



Дифференциальное приближение решения уравнения переноса

Рассмотрим интегральную (не спектральную) интенсивность излучения.

I. Проинтегрируем уравнение переноса (18) по всему телесному углу 4π

$$\int_{4\pi} \frac{dI}{dr} d\Omega = -\alpha \int_{4\pi} I d\Omega + \alpha \int_{4\pi} I_p d\Omega, \quad (24)$$

Вводим плотность лучистой энергии: $U = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I d\Omega$, поток излучения в среде: $\vec{S} = \int_{4\pi} I \cdot \vec{l} d\Omega$

У-е (24) переписывается

$$\nabla \cdot \vec{S} = -c\alpha U + 4\pi\alpha I_p. \quad (25)$$

II. Домножим уравнение переноса на вектор направления \vec{l} и проинтегрируем по телесному углу:

$$\int_{4\pi} \frac{dI}{dr} \cdot \vec{l} d\Omega = -\alpha \int_{4\pi} (I \cdot \vec{l}) d\Omega + \alpha \int_{4\pi} (I_p \cdot \vec{l}) d\Omega \rightarrow \vec{S} = \frac{c}{\text{coef} \cdot \alpha} \nabla U \quad (26)$$

$$\vec{S} \sim \frac{c}{\text{coef} \cdot \alpha} \nabla U \quad 0$$

Здесь coef принимает численное значение от 3 до 4 в зависимости от предположения о геометрическом виде индикатрисы излучения (например, сфера со смещенным центром - coef=3)

Подставляем (25) в (26) получаем систему уравнений дифференциального приближения переноса излучения:

$$\begin{cases} \nabla \left(\frac{1}{\alpha} \nabla U \right) - 4\alpha U + 16\pi \frac{\alpha}{c} I_p = 0 \\ \vec{S} = -\frac{c}{4\alpha} \nabla U \end{cases} \quad (27)$$

Вопрос. Каким известным численным методом можно решить (13)? Какие условия необходимо добавить к уравнению для решения задачи?

Свойства дифференциального приближения

1. Приближается к истинному решению ур-я переноса как в пределе оптически тонкого, так и в пределе оптически плотного газа.
2. Остается применимым для изотропно (приблизительно изотропно) рассеивающих сред.

Диффузионное приближение (лучистая теплопроводность)

Перейдем к пределу оптически плотной среды ($\alpha \rightarrow \infty$) в уравнении (27) получим

$$U = \frac{4\pi}{c} I_p \quad (28)$$

Далее подставляем во второе ур-е

$$\vec{S} = -\frac{c}{4\alpha} \nabla U = \left[U = \frac{4\pi}{c} I_p = \frac{4\pi \sigma T^4}{c \pi} = \frac{4\sigma T^4}{c} \right] = -\frac{4\sigma}{\alpha} T^3 \nabla T \quad (29)$$

Если $coef = 3$, а не 4, то

$$\vec{S} = -\frac{16\sigma}{3\alpha} T^3 \nabla T \quad (30)$$

Или $\vec{S} = -\Lambda_{rad} \nabla T$, где $\Lambda_{rad} = \frac{16\sigma}{3\alpha} T^3$

Формулы (29) и (30)- уравнения лучистой теплопроводности (диффузионное приближение переноса излучения).

Зональный метод

Разрабатывался для расчета переноса в топках, печах и т.д. На сегодня редко используется.

Вводятся N - объемных и K - поверхностных зон. Между каждыми зонами записывается перенос в соответствии с приближенными моделями или точным расчетом ур-я переноса. После суммирования определяется общая картина лучистых потоков.

Полуэмпирические модели расчета лучистого переноса в топках. Модель Поляка Шорина.

В топках котлов и печах лучистая составляющая теплообмена составляет 50 % и более. В первой половине и середине 20 В было разработано большое количество полуэмпирических моделей теплообмена топочных газов со стенками.

Обоснование - среда топочных газов оптически плотная среда на длинах порядка 1 м. Средняя длина пробега квантов составляет от единиц до десятков сантиметров.

Модель Поляка, Шорина.

$$\varepsilon K_T (\theta_1^4 - \theta_2^4) + \theta_1 - 1 = 0.$$

Здесь $\theta = \frac{T}{T_0}$, T_0 - стандартная температура, ε - степень черноты топочных газов, θ_1 - безразмерная

температура продуктов сгорания на выходе из топки, θ_2 - безразмерная температура стенок топки, K_T - топочный критерий (зависит от площади стенок, геометрии топки, расхода топлива).

Модель Поляка, Шорина позволяет определять температуру тепловоспринимающих стенок если известна температура продуктов на выходе. По сути, она представляет ур-е баланса энергии в системе.